Тригонометрические уравнения

Простейшими называются тригонометрические уравнения следующих четырёх видов:


Любое тригонометрическое уравнение в конечном счёте сводится к решению одного или нескольких простейших. К сожалению, на этом заключительном стандартном шаге школьники допускают множество элементарных ошибок. Цель данной статьи — уберечь вас от нелепых и досадных потерь баллов в подобной ситуации на едином госэкзамене.

Существуют два подхода к решению простейших тригонометрических уравнений.

Первый подход — бессмысленный и тяжёлый. Надо выучить по шпаргалке общие формулы, а также все частные случаи. Польза от этого столь же невелика, как от зубрёжки шестнадцати строк заклинаний на непонятном языке. Мы забраковываем этот подход раз и навсегда.

Второй подход — логический и наглядный. Для решения простейших тригонометрических уравнений мы пользуемся тригонометрическим кругом и определениями тригонометрических функций.

Данный подход требует понимания, осмысленных действий и ясного видения тригонометрического круга. Не беспокойтесь, эти трудности преодолеваются быстро. Усилия, потраченные на этом пути, будут щедро вознаграждены: вы начнёте безошибочно решать тригонометрические уравнения.

Уравнения cosx = a и sinx = a

Напомним, что cos x — абсцисса точки на единичной окружности, соответствующей углу x, а sin x — её ордината.



Из определения синуса и косинуса следует, что уравнения cosx = a и sinx = a имеют решения только при условии . Абитуриент, будь внимателен! Уравнения  или cosx = −7 решений не имеют!

Начнём с самых простых уравнений.

**1.** cosx = 1.

Мы видим, что на единичной окружности имеется лишь одна точка с абсциссой 1:



Эта точка соответствует бесконечному множеству углов: 0, 2π, −2π, 4π, −4π, 6π, −6π, . . . Все они получаются из нулевого угла прибавлением целого числа полных углов 2π (т. е. нескольких полных оборотов как в одну, так и в другую сторону).

Следовательно, все эти углы могут быть записаны одной формулой:



Это и есть множество решений данного уравнения. Напоминаем, что Z — это множество целых чисел.

**2.** cosx = -1.

Снова видим, что на единичной окружности есть лишь одна точка с абсциссой −1:



Эта точка соответствует углу π и всем углам, отличающихся от π на несколько полных оборотов в обе стороны, т. е. на целое число полных углов. Следовательно, все решения данного уравнения записываются формулой:



**3.** sinx = 1.

Отмечаем на тригонометрическом круге единственную точку с ординатой 1:



И записываем ответ:



**4.** sinx = -1.

Обсуждать тут уже нечего, не так ли? :-)





Можете, кстати, записать ответ и в другом виде:



Это — дело исключительно вашего вкуса.

Заодно сделаем первое полезное наблюдение.

*Чтобы описать множество углов, отвечающих одной-единственной точке тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить 2πn.*

**5.** sinx = 0.

На тригонометрическом круге имеются две точки с ординатой 0:



Эти точки соответствуют углам 0, ±π, ±2π, ±3π, . . . Все эти углы получаются из нулевого угла прибавлением целого числа углов π (т. е. с помощью нескольких полуоборотов в обе стороны). Таким образом,



Точки, лежащие на концах диаметра тригонометрического круга, мы будем называть *диаметральной парой*.

**6.** cosx = 0.

Точки с абсциссой 0 также образуют диаметральную пару, на сей раз вертикальную:



Все углы, отвечающие этим точкам, получаются из  прибавлением целого числа углов π (полуоборотов):



Теперь мы можем сделать и второе полезное наблюдение.

*Чтобы описать множество углов, отвечающих диаметральной паре точек тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить πn.*

Переходим к следующему этапу. Теперь в правой части будет стоять табличное значение синуса или косинуса (отличное от 0 или ±1). Начинаем с косинуса.

**7.** 

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой 



Все углы, соответствующие верхней точке, описываются формулой (вспомните первое полезное наблюдение!):



Аналогично, все углы, соответствующие нижней точке, описываются формулой:



Обе серии решений можно описать одной формулой:



Остальные уравнения с косинусом решаются совершенно аналогично. Мы приводим лишь рисунок и ответ.

**8.** 





**9.** 





**10.**





**11.**





**12.**





Теперь рассмотрим уравнения с синусом. Тут ситуация немного сложнее.

**13.**

Имеем горизонтальную пару точек с ординатой :



Углы, отвечающие правой точке:



Углы, отвечающие левой точке:



Описывать эти две серии одной формулой никто не заставляет. Можно записать ответ в таком виде:



Тем не менее, объединяющая формула существует, и её надо знать. Выглядит она так:



На первый взгляд совершенно не ясно, каким образом она даёт обе серии решений. Но давайте посмотрим, что получается при чётных k. Если k = 2n, то



Мы получили первую серию решений x1. А если k нечётно, k = 2n + 1, то



Это вторая серия x2.

Обратим внимание, что в качестве множителя при (−1)k обычно ставится правая точка, в данном случае .

Остальные уравнения с синусом решаются точно так же. Мы приводим рисунок, запись ответа в виде совокупности двух серий и объединяющую формулу.

**14.** 







**15.** 







**16.** 







**17.** 







**18.** 







На этом с синусом и косинусом пока всё. Переходим к тангенсу.

Линия тангенсов

Начнём с геометрической интерпретации тангенса — так называемой линии тангенсов. Это касательная AB к единичной окружности, параллельная оси ординат (см. рисунок).



Из подобия треугольников OAB и ONM имеем:



Но  поэтому 

Мы рассмотрели случай, когда x находится в первой четверти. Аналогично рассматриваются случаи, когда x находится в остальных четвертях. В результате мы приходим к следующей геометрической интерпретации тангенса.

*Тангенс угла x равен ординате точки B, которая является точкой пересечения линии тангенсов и прямой OM, соединяющей точку x с началом координат.*

Вот рисунок в случае, когда x находится во второй четверти. Тангенс угла x отрицателен.



Уравнение tg x = a

Заметим, что тангенс может принимать любые действительные значения. Иными словами, уравнение tg x = a имеет решения при любом a.

**19.**

Имеем диаметральную горизонтальную пару точек:



Эта пара, как мы уже знаем, описывается формулой:



**20.**

Имеем диаметральную пару:



Вспоминаем второе полезное наблюдение и пишем ответ:



Остальные уравнения с тангенсом решаются аналогично. Мы приводим лишь рисунки и ответы.

**21.**





**22.**





**23.**





**24.**





**25.**





На этом заканчиваем пока и с тангенсом.

Уравнение ctg x = a нет смысла рассматривать особо. Дело в том, что:

• уравнение ctg x = 0 равносильно уравнению cos x = 0;

• при  уравнение  равносильно уравнению 