Тригонометрические уравнения

Простейшими называются тригонометрические уравнения следующих четырёх видов:

https://latex.codecogs.com/png.latex?sinx=a,\:&space;\:&space;cosx=a,\:&space;\:&space;tgx=a,\:&space;\:&space;ctgx=a.  
Любое тригонометрическое уравнение в конечном счёте сводится к решению одного или нескольких простейших. К сожалению, на этом заключительном стандартном шаге школьники допускают множество элементарных ошибок. Цель данной статьи — уберечь вас от нелепых и досадных потерь баллов в подобной ситуации на едином госэкзамене.

Существуют два подхода к решению простейших тригонометрических уравнений.

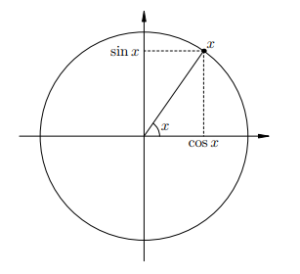
Первый подход — бессмысленный и тяжёлый. Надо выучить по шпаргалке общие формулы, а также все частные случаи. Польза от этого столь же невелика, как от зубрёжки шестнадцати строк заклинаний на непонятном языке. Мы забраковываем этот подход раз и навсегда.

Второй подход — логический и наглядный. Для решения простейших тригонометрических уравнений мы пользуемся тригонометрическим кругом и определениями тригонометрических функций.

Данный подход требует понимания, осмысленных действий и ясного видения тригонометрического круга. Не беспокойтесь, эти трудности преодолеваются быстро. Усилия, потраченные на этом пути, будут щедро вознаграждены: вы начнёте безошибочно решать тригонометрические уравнения.

Уравнения cosx = a и sinx = a

Напомним, что cos x — абсцисса точки на единичной окружности, соответствующей углу x, а sin x — её ордината.

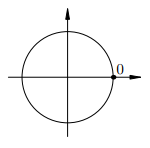
[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/01i.png)

Из определения синуса и косинуса следует, что уравнения cosx = a и sinx = a имеют решения только при условии https://latex.codecogs.com/png.latex?|a|&space;\leq&space;1. Абитуриент, будь внимателен! Уравнения https://latex.codecogs.com/png.latex?sinx&space;=&space;\frac%7b3%7d%7b2%7d или cosx = −7 решений не имеют!

Начнём с самых простых уравнений.

**1.** cosx = 1.

Мы видим, что на единичной окружности имеется лишь одна точка с абсциссой 1:

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/02i.png)

Эта точка соответствует бесконечному множеству углов: 0, 2π, −2π, 4π, −4π, 6π, −6π, . . . Все они получаются из нулевого угла прибавлением целого числа полных углов 2π (т. е. нескольких полных оборотов как в одну, так и в другую сторону).

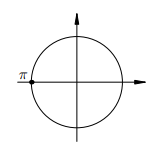
Следовательно, все эти углы могут быть записаны одной формулой:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

Это и есть множество решений данного уравнения. Напоминаем, что Z — это множество целых чисел.

**2.** cosx = -1.

Снова видим, что на единичной окружности есть лишь одна точка с абсциссой −1:

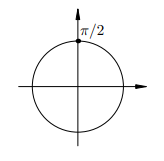
[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/03i.png)

Эта точка соответствует углу π и всем углам, отличающихся от π на несколько полных оборотов в обе стороны, т. е. на целое число полных углов. Следовательно, все решения данного уравнения записываются формулой:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\pi&space;+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**3.** sinx = 1.

Отмечаем на тригонометрическом круге единственную точку с ординатой 1:

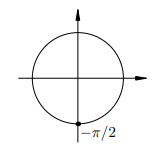
[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/04i.png)

И записываем ответ:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\frac%7b\pi%7d%7b2%7d&space;+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**4.** sinx = -1.

Обсуждать тут уже нечего, не так ли? :-)

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/05i.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=-\frac%7b\pi%7d%7b2%7d&space;+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

Можете, кстати, записать ответ и в другом виде:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\frac%7b3\pi%7d%7b2%7d&space;+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

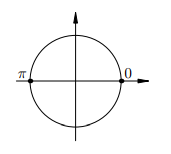
Это — дело исключительно вашего вкуса.

Заодно сделаем первое полезное наблюдение.

*Чтобы описать множество углов, отвечающих одной-единственной точке тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить 2πn.*

**5.** sinx = 0.

На тригонометрическом круге имеются две точки с ординатой 0:

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/06i.png)

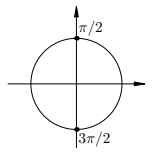
Эти точки соответствуют углам 0, ±π, ±2π, ±3π, . . . Все эти углы получаются из нулевого угла прибавлением целого числа углов π (т. е. с помощью нескольких полуоборотов в обе стороны). Таким образом,

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

Точки, лежащие на концах диаметра тригонометрического круга, мы будем называть *диаметральной парой*.

**6.** cosx = 0.

Точки с абсциссой 0 также образуют диаметральную пару, на сей раз вертикальную:

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/07i.png)

Все углы, отвечающие этим точкам, получаются из https://latex.codecogs.com/png.latex?\frac%7b\pi%7d%7b2%7d прибавлением целого числа углов π (полуоборотов):

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\frac%7b\pi%7d%7b2%7d+\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

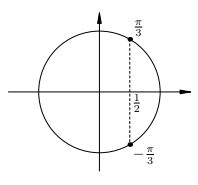
Теперь мы можем сделать и второе полезное наблюдение.

*Чтобы описать множество углов, отвечающих диаметральной паре точек тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить πn.*

Переходим к следующему этапу. Теперь в правой части будет стоять табличное значение синуса или косинуса (отличное от 0 или ±1). Начинаем с косинуса.

**7.** https://latex.codecogs.com/png.latex?cosx=\frac%7b1%7d%7b2%7d.

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой https://latex.codecogs.com/png.latex?\frac%7b1%7d%7b2%7d:

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/08i-1.png)

Все углы, соответствующие верхней точке, описываются формулой (вспомните первое полезное наблюдение!):

https://latex.codecogs.com/png.latex?x_%7b1%7d=\frac%7b\pi&space;%7d%7b3%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

Аналогично, все углы, соответствующие нижней точке, описываются формулой:

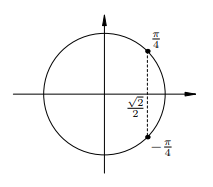
https://latex.codecogs.com/png.latex?x_%7b2%7d=-\frac%7b\pi&space;%7d%7b3%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

Обе серии решений можно описать одной формулой:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x_%7b2%7d=\pm&space;\frac%7b\pi&space;%7d%7b3%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

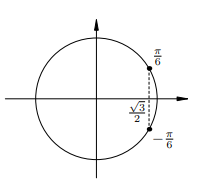
Остальные уравнения с косинусом решаются совершенно аналогично. Мы приводим лишь рисунок и ответ.

**8.** https://latex.codecogs.com/png.latex?cosx=\frac%7b\sqrt%7b2%7d%7d%7b2%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/09i.png)

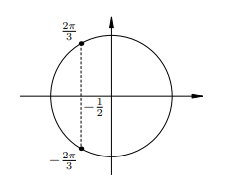
https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\pm&space;\frac%7b\pi&space;%7d%7b4%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**9.** https://latex.codecogs.com/png.latex?cosx=\frac%7b\sqrt%7b3%7d%7d%7b2%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/10i.png)

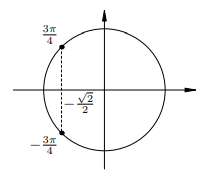
https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\pm&space;\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**10.**https://latex.codecogs.com/png.latex?cosx=-\frac%7b1%7d%7b2%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/11i.png)

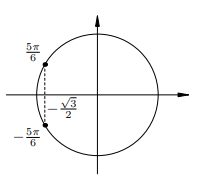
https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\pm&space;\frac%7b2\pi&space;%7d%7b3%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**11.**https://latex.codecogs.com/png.latex?cosx=-\frac%7b\sqrt%7b2%7d%7d%7b2%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/12i.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\pm&space;\frac%7b3\pi&space;%7d%7b4%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**12.**https://latex.codecogs.com/png.latex?cosx=-\frac%7b\sqrt%7b3%7d%7d%7b2%7d.

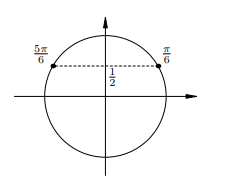
[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/13i.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\pm&space;\frac%7b5\pi&space;%7d%7b6%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

Теперь рассмотрим уравнения с синусом. Тут ситуация немного сложнее.

**13.**https://latex.codecogs.com/png.latex?sinx=\frac%7b1%7d%7b2%7d.

Имеем горизонтальную пару точек с ординатой https://latex.codecogs.com/png.latex?\frac%7b1%7d%7b2%7d:

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/14i.png)

Углы, отвечающие правой точке:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x_%7b1%7d=&space;\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

Углы, отвечающие левой точке:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x_%7b2%7d=&space;\frac%7b5\pi&space;%7d%7b6%7d+2\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

Описывать эти две серии одной формулой никто не заставляет. Можно записать ответ в таком виде:

[https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2121.png](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2121.png)

Тем не менее, объединяющая формула существует, и её надо знать. Выглядит она так:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=(-1)%5e%7bk%7d\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d+\pi&space;k,\:&space;\:&space;k\in&space;Z.

На первый взгляд совершенно не ясно, каким образом она даёт обе серии решений. Но давайте посмотрим, что получается при чётных k. Если k = 2n, то

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=(-1)%5e%7b2n%7d\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d+\pi\cdot&space;2&space;n=\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d+2\pi&space;n.

Мы получили первую серию решений x1. А если k нечётно, k = 2n + 1, то

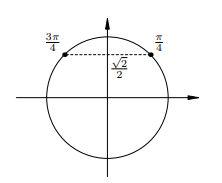
https://latex.codecogs.com/png.latex?x=(-1)%5e%7b2n+1%7d\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d+\pi(2n+1)=-\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d+2\pi&space;n+\pi&space;=\frac%7b5\pi&space;%7d%7b6%7d+2\pi&space;n.

Это вторая серия x2.

Обратим внимание, что в качестве множителя при (−1)k обычно ставится правая точка, в данном случае https://latex.codecogs.com/png.latex?\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d.

Остальные уравнения с синусом решаются точно так же. Мы приводим рисунок, запись ответа в виде совокупности двух серий и объединяющую формулу.

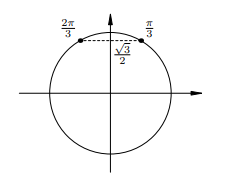
**14.** https://latex.codecogs.com/png.latex?sinx=\frac%7b\sqrt%7b2%7d%7d%7b2%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/15i.png)

[https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2122.png](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2122.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=(-1)%5e%7bk%7d\frac%7b\pi&space;%7d%7b4%7d+\pi&space;k,\:&space;\:&space;k\in&space;Z.

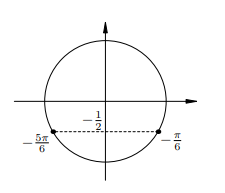
**15.** https://latex.codecogs.com/png.latex?sinx=\frac%7b\sqrt%7b3%7d%7d%7b2%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/16i.png)

[https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2123.png](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2123.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=(-1)%5e%7bk%7d\frac%7b\pi&space;%7d%7b3%7d+\pi&space;k,\:&space;\:&space;k\in&space;Z.

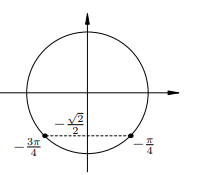
**16.** https://latex.codecogs.com/png.latex?sinx=-\frac%7b1%7d%7b2%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/17i.png)

[https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2124.png](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2124.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=(-1)%5e%7bk%7d\left&space;(-\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d&space;\right&space;)+\pi&space;k=(-1)%5e%7bk+1%7d\frac%7b\pi&space;%7d%7b6%7d+\pi&space;k,\:&space;\:&space;k\in&space;Z.

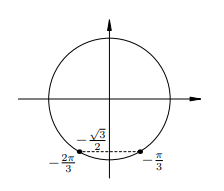
**17.** https://latex.codecogs.com/png.latex?sinx=-\frac%7b\sqrt%7b2%7d%7d%7b2%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/18i.png)

[https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2125.png](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2125.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=(-1)%5e%7bk+1%7d&space;\frac%7b\pi&space;%7d%7b4%7d&space;+\pi&space;k,\:&space;\:&space;k\in&space;Z.

**18.** https://latex.codecogs.com/png.latex?sinx=-\frac%7b\sqrt%7b3%7d%7d%7b2%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/19i.png)

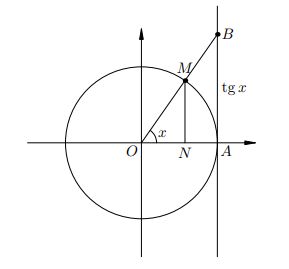
[https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2126.png](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/frm2126.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=(-1)%5e%7bk+1%7d&space;\frac%7b\pi&space;%7d%7b3%7d&space;+\pi&space;k,\:&space;\:&space;k\in&space;Z.

На этом с синусом и косинусом пока всё. Переходим к тангенсу.

Линия тангенсов

Начнём с геометрической интерпретации тангенса — так называемой линии тангенсов. Это касательная AB к единичной окружности, параллельная оси ординат (см. рисунок).

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/20i.png)

Из подобия треугольников OAB и ONM имеем:

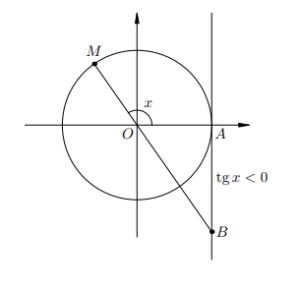
https://latex.codecogs.com/png.latex?\frac%7bAB%7d%7bOA%7d=\frac%7bMN%7d%7bON%7d.

Но https://latex.codecogs.com/png.latex?OA=1,&space;\:&space;\:&space;MN=sinx,\:&space;\:&space;ON=cosx, поэтому https://latex.codecogs.com/png.latex?AB=tgx.

Мы рассмотрели случай, когда x находится в первой четверти. Аналогично рассматриваются случаи, когда x находится в остальных четвертях. В результате мы приходим к следующей геометрической интерпретации тангенса.

*Тангенс угла x равен ординате точки B, которая является точкой пересечения линии тангенсов и прямой OM, соединяющей точку x с началом координат.*

Вот рисунок в случае, когда x находится во второй четверти. Тангенс угла x отрицателен.

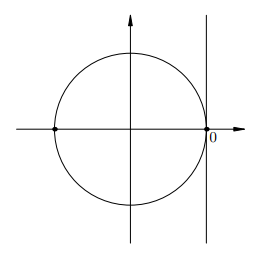
[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/21i.png)

Уравнение tg x = a

Заметим, что тангенс может принимать любые действительные значения. Иными словами, уравнение tg x = a имеет решения при любом a.

**19.**https://latex.codecogs.com/png.latex?tgx=0.

Имеем диаметральную горизонтальную пару точек:

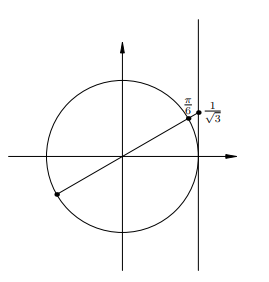
[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/22i.png)

Эта пара, как мы уже знаем, описывается формулой:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**20.**https://latex.codecogs.com/png.latex?tgx=\frac%7b1%7d%7b\sqrt%7b3%7d%7d.

Имеем диаметральную пару:

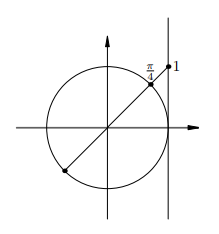
[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/23i.png)

Вспоминаем второе полезное наблюдение и пишем ответ:

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\frac%7b\pi%7d%7b6%7d+\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

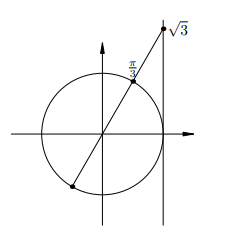
Остальные уравнения с тангенсом решаются аналогично. Мы приводим лишь рисунки и ответы.

**21.**https://latex.codecogs.com/png.latex?tgx=1.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/24i.png)

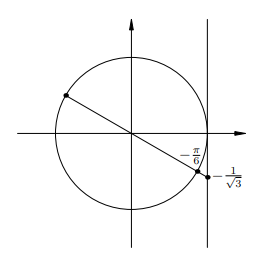
https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\frac%7b\pi&space;%7d%7b4%7d+\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**22.**https://latex.codecogs.com/png.latex?tgx=\sqrt%7b3%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/25i.png)

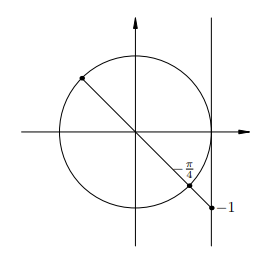
https://latex.codecogs.com/png.latex?x=\frac%7b\pi%7d%7b3%7d+\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**23.**https://latex.codecogs.com/png.latex?tgx=-\frac%7b1%7d%7b\sqrt%7b3%7d%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/26i.png)

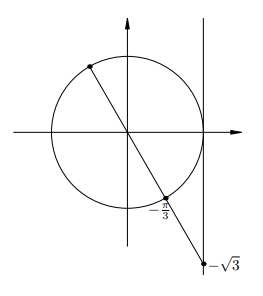
https://latex.codecogs.com/png.latex?x=-\frac%7b\pi%7d%7b6%7d+\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**24.**https://latex.codecogs.com/png.latex?tgx=-1.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/27i.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=-\frac%7b\pi%7d%7b4%7d+\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

**25.**https://latex.codecogs.com/png.latex?tgx=-\sqrt%7b3%7d.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/02/28i.png)

https://latex.codecogs.com/png.latex?x=-\frac%7b\pi%7d%7b3%7d+\pi&space;n,\:&space;\:&space;n\in&space;Z.

На этом заканчиваем пока и с тангенсом.

Уравнение ctg x = a нет смысла рассматривать особо. Дело в том, что:

• уравнение ctg x = 0 равносильно уравнению cos x = 0;

• при https://latex.codecogs.com/png.latex?a\neq&space;0 уравнение https://latex.codecogs.com/png.latex?ctgx=a равносильно уравнению https://latex.codecogs.com/png.latex?tgx=\frac%7b1%7d%7ba%7d.