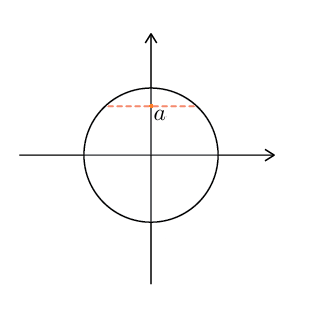
Тригонометрические уравнения часть 2

Уравнение sin\mkern 2mu x=a

Уравнение sin\mkern 2mu x=a имеет решения только при условии |a| \le 1 . Рассмотрением таких a мы и ограничиваемся.

Случай a = \pm 1  разобран в предыдущей статье. При |a| \leq 1  решения уравнения sin\mkern 2mu x=a изображаются горизонтальной парой точек тригонометрического круга, имеющих ординату a.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2013/06/trig2_01.png)

Осталось записать эти решения.

Здесь не обойтись без новой функции, обозначающей угол, синус которого равен числу a.

Проблема, однако, в том, что таких углов бесконечно много – функция не получается. (Если последняя фраза для вас не ясна, то вам стоит прочитать нашу статью [«Что такое функция?»](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/chto-takoe-funkciya/))

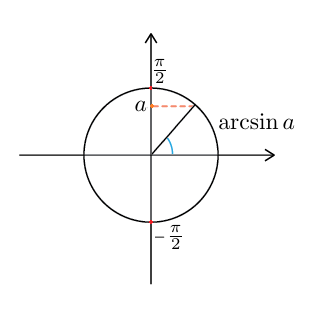
Чтобы упомянутая функция существовала, нужно ограничиться определнным промежутком углов, на котором каждое значение синуса принимается только один раз. Самый удобный выбор – отрезок .

Взгляните на тригонометрический круг и убедитесь сами: любому значению синуса из промежутка [-1; 1] отвечает одно-единственное значение угла на отрезке .

Вот теперь наше соответствие, сопоставляющее числу a \in \left[ -1; 1 \right] угол  такой, что sin\mkern 2mu \varphi=a, становится функцией. Эта функция носит красивое название – *арксинус*.

*Арксинусом числа a называется угол , такой, что sin\mkern 2mu \varphi=a*.

Обозначение: \varphi = arcsin \mkern 3mu a. Область определения арксинуса – отрезок [-1; 1].  
Область значений – отрезок .

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2013/06/trig2_02.png)

Можно запомнить фразу «арксинусы живут справа». Не забывайте только, что не просто справа, но ещё и на отрезке .

Например:

, так как  и

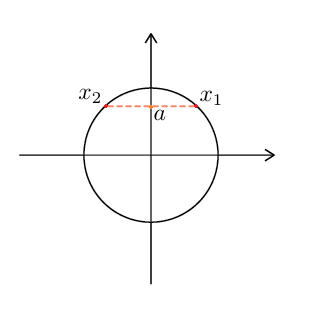
, так как  и

arcsin \mkern 3mu 0=0;

arcsin \mkern 3mu 1 =\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 1}{\displaystyle 2};

arcsin \mkern 3mu \left( -1 \right) =-\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle \pi}{\displaystyle 2}.

Обратите внимание, что arcsin \mkern 3mu \left( -a \right) =-arcsin \mkern 3mu a. Иными словами, арксинус является нечётной функцией.

Теперь мы готовы вернуться к уравнению sin\mkern 2mu x=a . Снова изобразим горизонтальную пару точек с ординатой a. Углы, отвечающие правой точке, обозначим x_1. Углы, отвечающие левой точке, обозначим x_2.  
[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2013/08/trig2_03.png)

Не составляет труда записать эти углы:

x_1=arcsin \mkern 3mu a + 2 \pi n, \,\,n \in Z;

x_2=\pi - arcsin \mkern 3mu a + 2 \pi n, \,\,n \in Z.

Собственно, это и есть ответ. При желании можно объединить обе формулы в одну – с помощью конструкции, известной вам из предыдущей статьи:

x=\left ( -1 \right )^k arcsin \mkern 3mu a + \pi k, \,\,k \in Z.

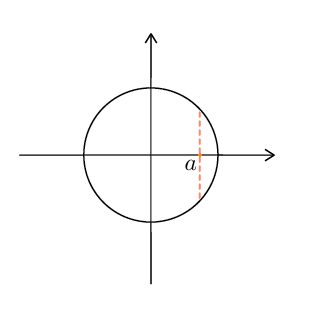
При записи ответа в случае отрицательного a можно использовать нечётность арксинуса.

Например, для уравнения sin\mkern 2mu x=-\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 1}{\displaystyle 3} имеем:

Уравнение cos\mkern 2mu x=a

Уравнение cos\mkern 2mu x=a также имеет решения лишь при |a| \leq 1 . Случай a= \pm 1 рассмотрен в предыдущей статье.

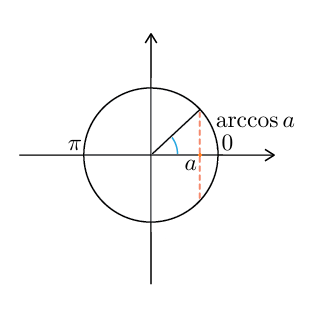
Решения уравнения cos\mkern 2mu x=a при |a| \le 1  изображаются вертикальной парой точек с абсциссой a.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2013/06/trig2_04.png)

Как вы уже догадались, сейчас возникнет новая функция – *арккосинус*. Кто лучший кандидат в арккосинусы – верхняя или нижняя точка? Принципиальной разницы нет, но люди выбрали верхнюю. «Арккосинусы живут сверху», и не просто сверху, а на отрезке \left [ 0; \pi \right ].

*Арккосинусом числа a называется угол \varphi \in \left [ 0; \pi \right ], такой, что cos\mkern 2mu\varphi=a.*

Обозначение: \varphi = arccos \mkern 3mu a. Область определения арккосинуса – отрезок [-1; 1]. Область значений – отрезок \left [ 0; \pi \right ].

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2013/06/trig2_05.png)

Промежуток \left [ 0; \pi \right ] выбран потому, что на нём каждое значение косинуса принимается только один раз. Иными словами, каждому значению косинуса, от -1 до 1, соответствует одно единственное значение угла из промежутка \left [ 0; \pi \right ].

Например:

, так как \,\, \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle \pi}{\displaystyle 6} \in \left[ 0; \pi \right] \, и

, так как \,\, -\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 3 \pi}{\displaystyle 4} \in \left[ 0; \pi \,\right]\, и

arccos \mkern 3mu 0=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle \pi}{\displaystyle 2};

arccos \mkern 3mu 1 =0;

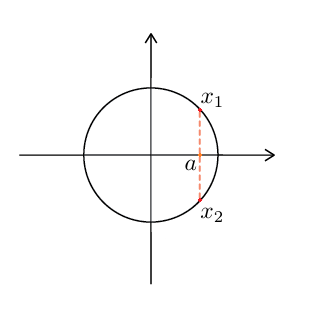
arccos \mkern 3mu \left( -1 \right) =\pi.

Внимание! Арккосинус не является ни чётной, ни нечётной функцией. Имеет место следующее очевидное соотношение:

arccos \mkern 3mu \left( -a \right) =\pi -arccos \mkern 3mu a.

Теперь мы можем решить уравнение cos\mkern 2mu x=a для произвольного a, удовлетворяющего неравенству |a| \le 1 .

Снова отметим на окружности вертикальную пару точек с абсциссой a. Углы, отвечающие верхней точке, обозначим x_1. Углы, отвечающие нижней точке, обозначим x_2.

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2013/06/trig2_06.png)

Легко написать формулы для этих углов:

x_1=arccos \mkern 3mu a + 2 \pi n, \,\,n \in Z;

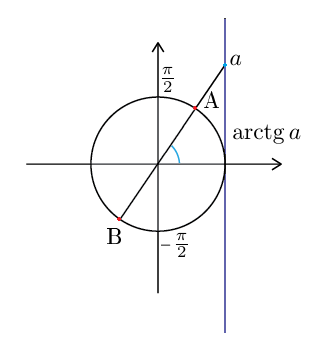
x_2= - arccos \mkern 3mu a + 2 \pi n, \,\,n \in Z.

Объединяем их в одну формулу и записываем ответ:

x=\pm arccos \mkern 3mu a + 2 \pi n, \,\,n \in Z.

Уравнения tg\mkern 2mu x=a и ctg\mkern 2mu x=a

Уравнение tg *x = a* имеет решения при любом *a*. Эти решения изображаются диаметральной парой точек:

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2013/06/trig2_07.png)

Как и в случае арксинуса, роль арктангенса отведена правой точке. Точнее:

*Арктангенсом числа a называется угол , такой, что tg\mkern 2mu x=a.*

Обозначение: \varphi=arctg\mkern 4mu a. Область определения арктангенса – промежуток \left ( -\infty ;+ \infty \right ). Область значений –интервал .

На нашем рисунке arctg \mkern 3mu a является одним из углов, соответствующих точке A.

А почему в определении арктангенса исключены концы промежутка – точки \, \, \pm \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle \pi}{\displaystyle 2}\,\,? Дело в том, что тангенс в этих точках не определён. Не существует числа a, равного тангенсу какого-либо из этих углов.

Записать решения уравнения tg\mkern 2mu x=a совсем просто. Вспоминаем второе полезное наблюдение из предыдущей статьи (как описывать диаметральную пару) и пишем ответ:

x=arctg \mkern 3mu a + \pi n, \,\,n \in Z.

Тем самым мы фактически разобрались и с уравнением ctg\mkern 2mu x=a при a \neq 0. В этом случае оно равносильно уравнению tg\mkern 2mu x=\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 1}{\displaystyle a}, и можно сразу записать ответ:

x=arctg \mkern 3mu \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 1}{\displaystyle a} + \pi n, \,\,n \in Z.

Но можно использовать и арккотангенс. Такая функция тоже существует, и вот её определение.

*Арккотангенсом числа a называется угол \varphi \in \left ( 0; \pi \right ), такой, что ctg https://latex.codecogs.com/png.latex?\varphi = a.*

Тогда решения уравнения ctg\mkern 2mu x=a при любом a имеют вид:

x=arcctg \mkern 3mu a + \pi n, \,\,n \in Z.

Подведём итог. Соберём формулы для решений простейших тригонометрических уравнений в небольшую таблицу.

|  |  |
| --- | --- |
| Уравнение | Решения |
| sin\mkern 2mu x=a, |a| \leq 1 | x=\left ( -1 \right )^k arcsin \mkern 2mu a + \pi k, k \in Z |
| cos\mkern 2mu x=a, |a| \leq 1 | x=\pm arccos \mkern 3mu a + 2 \pi n, n \in Z |
| tg \mkern 3mu x=a | x=arctg \mkern 3mu a + \pi n, n \in Z |
| ctg \mkern 3mu x=a | x=arcctg \mkern 3mu a + \pi n, n \in Z |

Обратите внимание, что все частные случаи типа sin \mkern 3mu x = 0, cos \mkern 3mu x = 1, tg \mkern 3mu x = 0, с которых мы начинали изучение простейших тригонометрических уравнений, тоже вписываются в эту схему. Однако стоит ли записывать, например, решение уравнения sin \mkern 3mu x = 0, в виде x=\left ( -1 \right )^k arcsin \mkern 2mu 0 + \pi k?