Тригонометрические уравнения часть 2

Уравнение 

Уравнение  имеет решения только при условии . Рассмотрением таких  мы и ограничиваемся.

Случай  разобран в предыдущей статье. При  решения уравнения  изображаются горизонтальной парой точек тригонометрического круга, имеющих ординату .



Осталось записать эти решения.

Здесь не обойтись без новой функции, обозначающей угол, синус которого равен числу .

Проблема, однако, в том, что таких углов бесконечно много – функция не получается. (Если последняя фраза для вас не ясна, то вам стоит прочитать нашу статью [«Что такое функция?»](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/chto-takoe-funkciya/))

Чтобы упомянутая функция существовала, нужно ограничиться определнным промежутком углов, на котором каждое значение синуса принимается только один раз. Самый удобный выбор – отрезок .

Взгляните на тригонометрический круг и убедитесь сами: любому значению синуса из промежутка [-1; 1] отвечает одно-единственное значение угла на отрезке .

Вот теперь наше соответствие, сопоставляющее числу ![a \in \left[ -1; 1 \right]]() угол  такой, что , становится функцией. Эта функция носит красивое название – *арксинус*.

*Арксинусом числа  называется угол , такой, что *.

Обозначение: . Область определения арксинуса – отрезок [-1; 1].
Область значений – отрезок .



Можно запомнить фразу «арксинусы живут справа». Не забывайте только, что не просто справа, но ещё и на отрезке .

Например:

, так как  и

, так как  и







Обратите внимание, что . Иными словами, арксинус является нечётной функцией.

Теперь мы готовы вернуться к уравнению . Снова изобразим горизонтальную пару точек с ординатой . Углы, отвечающие правой точке, обозначим . Углы, отвечающие левой точке, обозначим .


Не составляет труда записать эти углы:





Собственно, это и есть ответ. При желании можно объединить обе формулы в одну – с помощью конструкции, известной вам из предыдущей статьи:



При записи ответа в случае отрицательного  можно использовать нечётность арксинуса.

Например, для уравнения  имеем:

Уравнение 

Уравнение  также имеет решения лишь при . Случай  рассмотрен в предыдущей статье.

Решения уравнения  при  изображаются вертикальной парой точек с абсциссой .



Как вы уже догадались, сейчас возникнет новая функция – *арккосинус*. Кто лучший кандидат в арккосинусы – верхняя или нижняя точка? Принципиальной разницы нет, но люди выбрали верхнюю. «Арккосинусы живут сверху», и не просто сверху, а на отрезке ![\left [ 0; \pi \right ]]().

*Арккосинусом числа  называется угол ![\varphi \in \left [ 0; \pi \right ]](), такой, что .*

Обозначение: . Область определения арккосинуса – отрезок [-1; 1]. Область значений – отрезок ![\left [ 0; \pi \right ]]().



Промежуток ![\left [ 0; \pi \right ]]() выбран потому, что на нём каждое значение косинуса принимается только один раз. Иными словами, каждому значению косинуса, от -1 до 1, соответствует одно единственное значение угла из промежутка ![\left [ 0; \pi \right ]]().

Например:

, так как ![\,\, \genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle \pi}{\displaystyle 6} \in \left[ 0; \pi \right] \,]() и

, так как ![\,\, -\genfrac{}{}{}{0}{\displaystyle 3 \pi}{\displaystyle 4} \in \left[ 0; \pi \,\right]\,]() и







Внимание! Арккосинус не является ни чётной, ни нечётной функцией. Имеет место следующее очевидное соотношение:



Теперь мы можем решить уравнение  для произвольного , удовлетворяющего неравенству .

Снова отметим на окружности вертикальную пару точек с абсциссой . Углы, отвечающие верхней точке, обозначим . Углы, отвечающие нижней точке, обозначим .



Легко написать формулы для этих углов:





Объединяем их в одну формулу и записываем ответ:



Уравнения  и 

Уравнение tg *x = a* имеет решения при любом *a*. Эти решения изображаются диаметральной парой точек:



Как и в случае арксинуса, роль арктангенса отведена правой точке. Точнее:

*Арктангенсом числа  называется угол , такой, что .*

Обозначение: . Область определения арктангенса – промежуток . Область значений –интервал .

На нашем рисунке  является одним из углов, соответствующих точке .

А почему в определении арктангенса исключены концы промежутка – точки ? Дело в том, что тангенс в этих точках не определён. Не существует числа , равного тангенсу какого-либо из этих углов.

Записать решения уравнения  совсем просто. Вспоминаем второе полезное наблюдение из предыдущей статьи (как описывать диаметральную пару) и пишем ответ:



Тем самым мы фактически разобрались и с уравнением  при . В этом случае оно равносильно уравнению , и можно сразу записать ответ:



Но можно использовать и арккотангенс. Такая функция тоже существует, и вот её определение.

*Арккотангенсом числа  называется угол , такой, что ctg  = a.*

Тогда решения уравнения  при любом  имеют вид:



Подведём итог. Соберём формулы для решений простейших тригонометрических уравнений в небольшую таблицу.

|  |  |
| --- | --- |
| Уравнение | Решения |
| sin\mkern 2mu x=a, |a| \leq 1  | x=\left ( -1 \right )^k arcsin \mkern 2mu a + \pi k, k \in Z |
| cos\mkern 2mu x=a, |a| \leq 1  | x=\pm arccos \mkern 3mu a + 2 \pi n, n \in Z |
| tg \mkern 3mu x=a | x=arctg \mkern 3mu a + \pi n, n \in Z |
| ctg \mkern 3mu x=a | x=arcctg \mkern 3mu a + \pi n, n \in Z |

Обратите внимание, что все частные случаи типа  с которых мы начинали изучение простейших тригонометрических уравнений, тоже вписываются в эту схему. Однако стоит ли записывать, например, решение уравнения  в виде ?