Степень с натуральным показателем

Проще всего определяется степень с натуральным (то есть целым положительным) показателем.

По определению, .

Выражения «возвести в квадрат» и «возвести в куб» нам давно знакомы.
*Возвести число в квадрат — значит умножить его само на себя*.

.

*Возвести число в куб — значит умножить его само на себя три раза.*

.

Возвести число в натуральную степень  — значит умножить его само на себя  раз:

 

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

Степень с целым показателем

Показатель степени может быть не только натуральным (то есть целым положительным), но и равным нулю, а также целым отрицательным.

По определению,

.

Это верно для . Выражение 00 не определено.

Определим также, что такое степень с целым отрицательным показателем.







Конечно, все это верно для , поскольку на ноль делить нельзя.

Например,







Заметим, что *при возведении в минус первую степень дробь переворачивается*.

Показатель степени может быть не только целым, но и *дробным*, то есть рациональным числом. В статье «Числовые множества» мы говорили, что такое рациональные числа. Это числа, которые можно записать в виде дроби , где  — целое,  — натуральное.

Здесь нам понадобится новое понятие — корень -степени. Корни и степени — две взаимосвязанные темы. Начнем с уже знакомого вам арифметического квадратного корня.

**Определение.**

**Арифметический квадратный корень из числа  — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен .**

Согласно определению, 

В школьной математике мы извлекаем корень только из неотрицательных чисел. Выражение    для нас сейчас имеет смысл только при .

Выражение  всегда неотрицательно, т.е. . Например, .

**Свойства арифметического квадратного корня:**



**Запомним важное правило: **

**По определению, **.

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

Кубический корень

Аналогично, *кубический корень из  — это такое число, которое при возведении в третью степень дает число *.

Например, ![\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{8} = 2](), так как  ;

![\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{1000} = 10](), так как ;

![\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{-\genfrac{}{}{}{0}{1}{125}} = -\genfrac{}{}{}{0}{1}{5}](), так как .

Обратите внимание, что корень третьей степени можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.

Теперь мы можем дать определение корня -ной степени для любого целого .

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

Корень -ной степени

*Корень -ной степени из числа  — это такое число, при возведении которого в -ную степень получается число .*

Например,

![\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 5]{32} = 2;]()

![\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 4]{81} = 3;]()

![\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{\mathstrut 0,001} = 0,1.]()

Заметим, что корень третьей, пятой, девятой — словом, любой нечетной степени, — можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.

Квадратный корень, а также корень четвертой, десятой, в общем, любой четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел.

Итак, ![\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle n]{a}]() — такое число, что ![\left( \sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle n]{a} \right) ^n = a](). Оказывается, корни можно записывать в виде степеней с рациональным показателем. Это удобно.

По определению,



![a^{\genfrac{}{}{}{3}{\scriptstyle 1}{\scriptstyle 3}} = \sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{a},]()

в общем случае ![a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle n]{a}.]().

Сразу договоримся, что основание степени  больше 0.

Например,











Выражение  по определению равно ![\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle n]{a^m}]().

При этом также выполняется условие, что  больше 0.

Например,

Запомним *правила действий со степенями*:

 — при перемножении степеней показатели складываются;

 — при делении степени на степень показатели вычитаются;

 — при возведении степени в степень показатели перемножаются;





Покажем, как применяются эти формулы в заданиях ЕГЭ по математике:

1.



Внесли все под общий корень, разложили на множители, сократили дробь и извлекли корень.

2.

3.

Здесь мы записали корни в виде степеней и использовали формулы действий со степенями.
4. Найдите значение выражения  при 

Решение:

При  получим 

Ответ: -0,5.

5. Найдите значение выражения  при 

Решение:

При a = 12 получим 

Мы воспользовались свойствами степеней.

Ответ: 144.

6. Найдите значение выражения  при b = - 5.

Решение:

При b = - 5 получим: 

Ответ: -125.

7. Расположите в порядке возрастания:   

Решение:

Запишем выражения как степени с положительным показателем и сравним.

 Так как  то 

 Так как  то 

Сравним  и  для этого оценим их разность:

 значит 

Получим :  поэтому

Ответ:

8. Представьте выражение в виде степени: 

Решение:

Вынесем за скобку степень с меньшим показателем:

Ответ: 

9. Упростите выражение: 

Решение:

Приведем основания 6 и 12 к основаниям 2 и 3:

(выполним деление степеней с одинаковыми основаниями)

Ответ: 0,25.

10. Чему равно значение выражения  при ?

Решение:



При  получим 

Ответ: 9.

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

**Сравнение арифметических корней**

11. Какое из чисел больше:  или ?

Решение:

Возведем в квадрат оба числа (числа положительные):





Найдем разность полученных результатов:

 так как 

Значит, первое число больше второго.

Ответ: 

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

**Как избавиться от иррациональности в знаменателе**

Если дана дробь вида  то нужно умножить числитель и знаменатель дроби на :

Тогда знаменатель станет рациональным.

Если дана дробь вида  или  то нужно умножить числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение, чтобы получить в знаменателе разность квадратов.

Сопряженные выражения - это выражения, отличающиеся только знаками. Например,

 и   и  - сопряженные выражения.

Пример:

12. Вот несколько примеров - как избавиться от иррациональности в знаменателе:

Пример 1.

Пример 2.



Пример 3.



Пример 4.



Совет. Если в знаменателе дана сумма двух корней, то в разности первым числом пишите то, которое больше, и тогда разность квадратов корней будет положительным числом.

Пример 5.

13. Сравните  и 

1)



2) Сравним  и 14.

  то и  а значит,



Ответ:  меньше.

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

**Как упрощать иррациональные выражения, пользуясь формулами сокращенного умножения**

Покажем несколько примеров.

14. Упростите: выражения:   

Пример 5.



 т.к. 

Пример 6.



Пример 7.



так как 

Следующие несколько задач решаются с помощью формулы:



Решение:



Получим уравнение   

Ответ: 

19. Вычислите значение выражения: 

Решение:





Ответ: 1.

20. Вычислите значение выражения: 

Решение: 



Ответ: 1.

21. Вычислите значение выражения:  если 

Решение.



Если  то  следовательно 

Ответ: - 1.

22. Вычислите: 

Решение:



Ответ: 1.

**Рассмотрим уравнение вида  где **

**Это равенство выполняется, только если **

Подробно об таких уравнениях - в статье [«Показательные уравнения»](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/pokazatelnye-uravneniya/).

При решении уравнений такого вида мы пользуемся монотонностью показательной функции.

23. Решите уравнение:

а) 

б) 

в) 

Решение.

23. Решите уравнение: 

Решение:

 тогда 

Ответ: -1.

24. Решите уравнение:



Решение:



Ответ: 4.

25. Решите уравнение: 

Решение:

Значит,    

Ответ: -0,2.