Степень с натуральным показателем

Проще всего определяется степень с натуральным (то есть целым положительным) показателем.

По определению, a^1=a.

Выражения «возвести в квадрат» и «возвести в куб» нам давно знакомы.  
*Возвести число в квадрат — значит умножить его само на себя*.

a^2=a \cdot a.

*Возвести число в куб — значит умножить его само на себя три раза.*

a^3=a \cdot a \cdot a.

Возвести число в натуральную степень n — значит умножить его само на себя n раз:

a^n= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\displaystyle n}.

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

Степень с целым показателем

Показатель степени может быть не только натуральным (то есть целым положительным), но и равным нулю, а также целым отрицательным.

По определению,

a^0=1.

Это верно для a\neq 0. Выражение 00 не определено.

Определим также, что такое степень с целым отрицательным показателем.

a^{-1}=\genfrac{}{}{}{0}{1}{a};

a^{-2}=\genfrac{}{}{}{0}{1}{a^2};

a^{-n}=\genfrac{}{}{}{0}{1}{a^n}.

Конечно, все это верно для a\neq 0, поскольку на ноль делить нельзя.

Например,

5^{-2}=\genfrac{}{}{}{0}{1}{5^2};

\left( \genfrac{}{}{}{0}{1}{2} \right)^{-1}=2;

\left( \genfrac{}{}{}{0}{2}{7} \right)^{-1}=\genfrac{}{}{}{0}{7}{2}.

Заметим, что *при возведении в минус первую степень дробь переворачивается*.

Показатель степени может быть не только целым, но и *дробным*, то есть рациональным числом. В статье «Числовые множества» мы говорили, что такое рациональные числа. Это числа, которые можно записать в виде дроби \genfrac{}{}{}{0}{p}{q}, где p — целое, q — натуральное.

Здесь нам понадобится новое понятие — корень n-степени. Корни и степени — две взаимосвязанные темы. Начнем с уже знакомого вам арифметического квадратного корня.

**Определение.**

**Арифметический квадратный корень из числа a — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a.**

Согласно определению, \left (\sqrt{a} \right )^2=a; \, \, \sqrt{a}\geq 0; \, \, a\geq 0.

В школьной математике мы извлекаем корень только из неотрицательных чисел. Выражение  \sqrt{a}  для нас сейчас имеет смысл только при a\geq 0.

Выражение \sqrt{a} всегда неотрицательно, т.е. \sqrt{a}\geq 0. Например, \sqrt{25}=5.

**Свойства арифметического квадратного корня:**

\sqrt{\genfrac{}{}{}{0}{a}{b}}=\genfrac{}{}{}{0}{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.

**Запомним важное правило: \sqrt{a^2}=\left|a\right| .**

**По определению, https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2022/09/formula47181.gif**.

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

Кубический корень

Аналогично, *кубический корень из a — это такое число, которое при возведении в третью степень дает число a*.

Например, \sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{8} = 2, так как 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 ;

\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{1000} = 10, так как 10^3 = 1000;

\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{-\genfrac{}{}{}{0}{1}{125}} = -\genfrac{}{}{}{0}{1}{5}, так как \left( -\genfrac{}{}{}{0}{1}{5} \right) ^3 = -\genfrac{}{}{}{0}{1}{125}.

Обратите внимание, что корень третьей степени можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.

Теперь мы можем дать определение корня n-ной степени для любого целого n.

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

Корень n-ной степени

*Корень n-ной степени из числа a — это такое число, при возведении которого в n-ную степень получается число a.*

Например,

\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 5]{32} = 2;

\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 4]{81} = 3;

\sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{\mathstrut 0,001} = 0,1.

Заметим, что корень третьей, пятой, девятой — словом, любой нечетной степени, — можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.

Квадратный корень, а также корень четвертой, десятой, в общем, любой четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел.

Итак, \sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle n]{a} — такое число, что \left( \sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle n]{a} \right) ^n = a. Оказывается, корни можно записывать в виде степеней с рациональным показателем. Это удобно.

По определению,

a^{\genfrac{}{}{}{3}{\scriptstyle 1}{\scriptstyle 2}} = \sqrt{a},

a^{\genfrac{}{}{}{3}{\scriptstyle 1}{\scriptstyle 3}} = \sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle 3]{a},

в общем случае a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle n]{a}..

Сразу договоримся, что основание степени a больше 0.

Например,

25^{\genfrac{}{}{}{3}{\scriptstyle 1}{\scriptstyle 2}} = 5;

8^{\genfrac{}{}{}{3}{\scriptstyle 1}{\scriptstyle 3}} = 2;

81^{\genfrac{}{}{}{3}{\scriptstyle 1}{\scriptstyle 4}} = 3;

100000^{\genfrac{}{}{}{3}{\scriptstyle 1}{\scriptstyle 5}} = 10;

0,001^{\genfrac{}{}{}{3}{\scriptstyle 1}{\scriptstyle 3}} = 0,1.

Выражение a^{\genfrac{}{}{}{3}{\scriptstyle m}{\scriptstyle n}} по определению равно \sqrt[\leftroot{3}\scriptstyle n]{a^m}.

При этом также выполняется условие, что a больше 0.

Например,

Запомним *правила действий со степенями*:

a^ma^n = a^{m+n} — при перемножении степеней показатели складываются;

\genfrac{}{}{}{0}{a^m}{a^n} = a^{m-n} — при делении степени на степень показатели вычитаются;

\left( a^m \right) ^n = \left( a^n \right) ^m = a^{mn} — при возведении степени в степень показатели перемножаются;

a^nb^n = \left( ab \right) ^n;

\genfrac{}{}{}{0}{a^n}{b^n} = \left( \genfrac{}{}{}{0}{a}{b} \right) ^n.

Покажем, как применяются эти формулы в заданиях ЕГЭ по математике:

1.

= \sqrt{ \mathstrut 7 \cdot 7} = 7.

Внесли все под общий корень, разложили на множители, сократили дробь и извлекли корень.

2.

3.

Здесь мы записали корни в виде степеней и использовали формулы действий со степенями.  
4. Найдите значение выражения \displaystyle \frac{11a^6b^3-{\left(3a^2b\right)}^3}{4a^6b^6} при b = 2.

Решение:

При b = 2 получим -\displaystyle \frac{4}{2^3}=-\displaystyle \frac{4}{8}=-0,5 .

Ответ: -0,5.

5. Найдите значение выражения \displaystyle \frac{a^{3,21}\ \cdot \ a^{7,36}}{a^{8,57}} при a=12 .

Решение:

При a = 12 получим {12}^2=144.

Мы воспользовались свойствами степеней.

Ответ: 144.

6. Найдите значение выражения  при b = - 5.

Решение:

При b = - 5 получим: {(-5)}^3=-125 .

Ответ: -125.

7. Расположите в порядке возрастания: {\left(\displaystyle \frac{7}{8}\right)}^{-3}; \displaystyle \frac{7}{8}; {\left(\displaystyle \frac{8}{7}\right)}^{-3}.

Решение:

Запишем выражения как степени с положительным показателем и сравним.

\left(\displaystyle \frac{7}{8}\right)^-3=\left(\displaystyle \frac{8}{7}\right)^3. Так как \displaystyle \frac{8}{7} \textgreater 1, то \left(\displaystyle \frac{8}{7}\right)^3 \textgreater 1.

\left(\displaystyle \frac{8}{7}\right)^-3=\left(\displaystyle \frac{7}{8}\right)^3. Так как \displaystyle \frac{7}{8} \textless 1, то \left(\displaystyle \frac{7}{8}\right)^3 \textless 1.

Сравним \displaystyle \frac{7}{8} и {\left(\displaystyle \frac{7}{8}\right)}^3, для этого оценим их разность:

 значит \displaystyle \frac{7}{8} \textgreater {\left(\displaystyle \frac{7}{8}\right)}^3 .

Получим :  поэтому

Ответ:

8. Представьте выражение в виде степени: \displaystyle \frac{x^{-6}+x^{-4}+x^{-2}}{x^2+x^4+x^6}.

Решение:

Вынесем за скобку степень с меньшим показателем:

Ответ: x^{-8} .

9. Упростите выражение: \displaystyle \frac{2^{2n-1}\ \cdot \ 3^{n+1}}{6\ \cdot \ {12}^n} .

Решение:

Приведем основания 6 и 12 к основаниям 2 и 3:

(выполним деление степеней с одинаковыми основаниями)

Ответ: 0,25.

10. Чему равно значение выражения \displaystyle \frac{a^{-4}\cdot {\ a}^{-3}}{a^{-5}}\ \ при a=\displaystyle \frac{1}{3}?

Решение:

\displaystyle \frac{a^{-4}\cdot {\ a}^{-3}}{a^{-5}}=a^{-4+\left(-3\right)-(-5)}=a^{-2}.

При a=\displaystyle \frac{1}{3}, получим {\left(\displaystyle \frac{1}{3}\right)}^{-2}=3^2=9.

Ответ: 9.

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

**Сравнение арифметических корней**

11. Какое из чисел больше: \sqrt{5}+\sqrt{6} или 2+\sqrt{7}?

Решение:

Возведем в квадрат оба числа (числа положительные):

{\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)}^2= 5 + 2\sqrt{5\cdot 6}+6=11+2\sqrt{30};

{\left(2+7\right)}^2={\left(\sqrt{4}+\sqrt{7}\right)}^2= 4 + 2\sqrt{4\cdot 7}+7=11+2\sqrt{28}.

Найдем разность полученных результатов:

11+2\sqrt{30}-(11+2\sqrt{28})=2(\sqrt{30}-\sqrt{28}) \textgreater 0, так как \sqrt{30} \textgreater \sqrt{28}.

Значит, первое число больше второго.

Ответ: \sqrt{5}+\sqrt{6} \textgreater \ 2+\sqrt{7}.

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

**Как избавиться от иррациональности в знаменателе**

Если дана дробь вида \displaystyle \frac{a}{\sqrt{b}}, то нужно умножить числитель и знаменатель дроби на \sqrt{b}:

Тогда знаменатель станет рациональным.

Если дана дробь вида \displaystyle \frac{c}{\ a\ \pm \ \sqrt{b}} или \displaystyle \frac{c}{\ \ \sqrt{a}\ \pm \ \sqrt{b}}, то нужно умножить числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение, чтобы получить в знаменателе разность квадратов.

Сопряженные выражения - это выражения, отличающиеся только знаками. Например,

a + \sqrt{b} и a-\sqrt{b}; \sqrt{a}+\sqrt{b} и \sqrt{a}-\sqrt{b} - сопряженные выражения.

Пример:

12. Вот несколько примеров - как избавиться от иррациональности в знаменателе:

Пример 1.

Пример 2.

=\displaystyle \frac{6(\sqrt{3}-1)}{2}=3(\sqrt{3}-1).

Пример 3.

\displaystyle \frac{33(7+3\sqrt{3})}{22}=\displaystyle \frac{3(7+3\sqrt{3})}{2}.

Пример 4.

=\displaystyle \frac{12(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}=4(\sqrt{6}-\sqrt{3}).

Совет. Если в знаменателе дана сумма двух корней, то в разности первым числом пишите то, которое больше, и тогда разность квадратов корней будет положительным числом.

Пример 5.

13. Сравните \sqrt{140} и \displaystyle \frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\displaystyle \frac{1}{7-4\sqrt{3}}.

1)

=\displaystyle \frac{14}{49-48}=14.

2) Сравним \sqrt{140} и 14.

14 = \sqrt{{14}^2}=\sqrt{196}, 140 \textless 196, то и \sqrt{140} \textless \sqrt{196}, а значит,

\sqrt{140}\ \textless \displaystyle \frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\displaystyle \frac{1}{7-4\sqrt{3}} .

Ответ: \sqrt{140} меньше.

[к оглавлению ▴](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/korni-i-stepeni/#copmenu)

**Как упрощать иррациональные выражения, пользуясь формулами сокращенного умножения**

Покажем несколько примеров.

14. Упростите: выражения: \sqrt{3-2\sqrt{2}}; \sqrt{7+4\sqrt{3}}; \sqrt{19-8\sqrt{3}}.

Пример 5.

\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2+1-2\sqrt{2}}=\sqrt{{\left(\sqrt{2}\right)}^2-2\cdot 1\cdot \sqrt{2}+1}=

=\sqrt{{\left(\sqrt{2}-1\right)}^2} = \ \left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1, т.к. \sqrt{2} \textgreater 1.

Пример 6.

= \sqrt{{(2+\sqrt{3})}^2} = 2+\sqrt{3}. 

Пример 7.

=\sqrt{{(4-\sqrt{3})}^2} = 4-\sqrt{3},

так как 4-\sqrt{3}=\sqrt{16}-\sqrt{3} \textgreater 0 .

Следующие несколько задач решаются с помощью формулы:

\sqrt{a^2}=\left|a\right|. 

Решение:

\sqrt{{(5-2x)}^2}=\left|5-2x\right|. 

Получим уравнение \left|5-2x\right|=2x-5, 2x-5\ge 0, x \geq 2,5.

Ответ: [2,5; + \infty ).

19. Вычислите значение выражения: \sqrt{{(\sqrt{3}-1)}^2}+\sqrt{{(\sqrt{3}-2)}^2}.

Решение:

\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=|\sqrt{3}-1|+|\sqrt{3}-2|=

=\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}=1.

Ответ: 1.

20. Вычислите значение выражения: \sqrt{{(2-\sqrt{5})}^2}+\sqrt{{(3-\sqrt{5})}^2}.

Решение: \sqrt{{(2-\sqrt{5})}^2}+\sqrt{{(3-\sqrt{5})}^2}= \left|2-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|=

=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5} = 1.

Ответ: 1.

21. Вычислите значение выражения: (x - 3) \sqrt{\displaystyle \frac{1}{x^2-6x+9}}, если x \textless 3.

Решение.

=\displaystyle \frac{x-3}{3-x}=-1.

Если x \textless 3, то x - 3 \textless 0, следовательно \left|x-3\right|=-\left(x-3\right)=3-x.

Ответ: - 1.

22. Вычислите: (\sqrt{3}-2)(\sqrt{7+4\sqrt{3}}).

Решение:

= \sqrt{49-48} = 1.

Ответ: 1.

**Рассмотрим уравнение вида a^x=a^y, где a \textgreater 0.**

**Это равенство выполняется, только если x = y.**

Подробно об таких уравнениях - в статье [«Показательные уравнения»](https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/pokazatelnye-uravneniya/).

При решении уравнений такого вида мы пользуемся монотонностью показательной функции.

23. Решите уравнение:

а) 2^{3-x}=16;

б) {27}^{\displaystyle \frac{1}{3}x-1}-3=0;

в) {\left(\displaystyle \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}^{2x+1}={\left(3\sqrt{3}\right)}^x.

Решение.

23. Решите уравнение: 2^{3-x}=16.

Решение:

2^{3-x}=2^4, тогда 3 - x = 4, \; x = - 1.

Ответ: -1.

24. Решите уравнение:

{27}^{\displaystyle \frac{1}{3}x-1}-3=0. 

Решение:

3\left(\displaystyle \frac{1}{3}x-1\right)=1, \; x - 3 = 1, \; x = 4.

Ответ: 4.

25. Решите уравнение: {\left(\displaystyle \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}^{2x+1}={\left(3\sqrt{3}\right)}^x.

Решение:

Значит, -\displaystyle \frac{1}{2}\ \cdot \left(2x+1\right)=\displaystyle \frac{3}{2}x, - 2x - 1 = 3x, - 5x = 1 , x = -\displaystyle \frac{1}{5}.

Ответ: -0,2.