Логарифмические неравенства

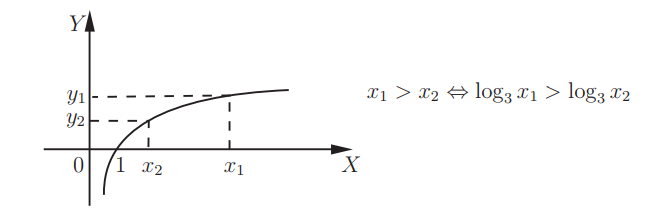
Рассмотрим неравенство log3x > log35.  
Поскольку логарифмы определены только для положительных чисел, необходимо, чтобы x был положительным. Условие x > 0 называется областью допустимых значений (ОДЗ) данного неравенства. Только при таких x неравенство имеет смысл.

Что делать дальше? Стандартный ответ, который дают школьники, — «Отбросить логарифмы!»

Что ж, эта формулировка лихо звучит и легко запоминается. Но почему мы все-таки можем это сделать?

Мы люди, мы обладаем интеллектом. Наш разум устроен так, что все логичное, понятное, имеющее внутреннюю структуру запоминается и применяется намного лучше, чем случайные и не связанные между собой факты. Вот почему важно не механически вызубрить правила, как дрессированная собачка-математик, а действовать осознанно.

Так почему же мы все-таки «отбрасываем логарифмы»?

Ответ простой: если основание больше единицы (как в нашем случае), логарифмическая функция монотонно возрастает, значит, большему значению x соответствует большее значение y и из неравенства log3x1 > log3x2 следует, что x1 > x2.  
  
Обратите внимание, мы перешли к алгебраическому неравенству, и знак неравенства при этом — сохраняется.

Итак, x > 5.

Следующее логарифмическое неравенство тоже простое.

**5.** log5(15 + 3x) > log52x.

Начнём с области допустимых значений. Логарифмы определены только для положительных чисел, поэтому

https://latex.codecogs.com/png.latex?\left\%7b\begin%7bmatrix%7d&space;15+3x%3E0;\\&space;2x%3E0.&space;\end%7bmatrix%7d\right.

Решая эту систему, получим: x > 0.

Теперь от логарифмического неравенства перейдем к алгебраическому — «отбросим» логарифмы. Поскольку основание логарифма больше единицы, знак неравенства при этом сохраняется.

15 + 3x > 2x.

Получаем: x > −15.

Итак,  
https://latex.codecogs.com/png.latex?\left\%7b\begin%7bmatrix%7d&space;x%3E0;\\&space;x%3E-15.&space;\end%7bmatrix%7d\right.

Ответ: x > 0.

А что же будет, если основание логарифма меньше единицы? Легко догадаться, что в этом случае при переходе к алгебраическому неравенству знак неравенства будет меняться.

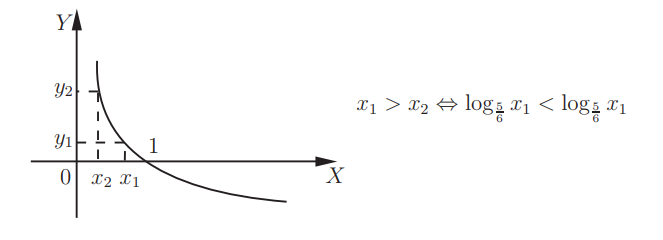
Приведем пример.

**6.** https://latex.codecogs.com/png.latex?log_%7b\frac%7b5%7d%7b6%7d%7d\left&space;(&space;2x-9&space;\right&space;)\geq&space;log_%7b\frac%7b5%7d%7b6%7d%7dx.

Запишем ОДЗ. Выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительно, то есть

https://latex.codecogs.com/png.latex?\left\%7b\begin%7bmatrix%7d&space;2x-9%3E0;\\&space;x%3E0.&space;\end%7bmatrix%7d\right.

Решая эту систему, получим: x > 4,5.

Поскольку https://latex.codecogs.com/png.latex?\frac%7b5%7d%7b6%7d%3C1, логарифмическая функция с основанием https://latex.codecogs.com/png.latex?\frac%7b5%7d%7b6%7d монотонно убывает. А это значит, что большему значению функции отвечает меньшее значение аргумента:  
  
И если https://latex.codecogs.com/png.latex?log_%7b\frac%7b5%7d%7b6%7d%7d(2x-9)\geq&space;log_%7b\frac%7b5%7d%7b6%7d%7dx, то  
2x − 9 ≤ x.

Получим, что x ≤ 9.

Учитывая, что x > 4,5, запишем ответ:

x ∈ (4,5; 9].

В следующей задаче показательное неравенство сводится к квадратному. Так что тему «Квадратные неравенства» рекомендуем повторить.

**7.** 4x − 2 · 52x − 10x > 0.

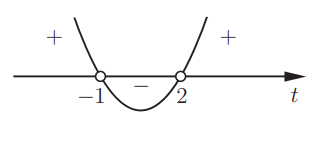
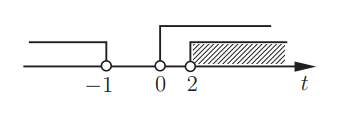
Заметим, что 4x = 22x, 10x=5x·2x, и запишем неравенство в виде:

22x − 5x·2x − 2 · 52x > 0.

Разделим обе части на положительную величину 52x и обозначим https://latex.codecogs.com/png.latex?\left&space;(&space;\frac%7b2%7d%7b5%7d&space;\right&space;)%5e%7bx%7d=t. Получим квадратное неравенство:

t2 − t − 2 > 0.

Кроме того, t > 0.

Графиком функции y = t2 − t − 2 является парабола, ветви которой направлены вверх. Решая квадратное уравнение t2 − t − 2 = 0, получим t1 = −1, t2 = 2. В этих точках наша парабола пересекает ось t.  
  
Отметим на числовой прямой промежутки, являющиеся решениями неравенств t2 − t − 2 > 0 и t > 0.  
  
Видим, что обоим неравенствам удовлетворяют значения t > 2.

Но решение еще не закончено! Нам нужно вернуться к переменной x. Вспомним, что https://latex.codecogs.com/png.latex?t=\left&space;(&space;\frac%7b2%7d%7b5%7d&space;\right&space;)%5e%7bx%7d и получим:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\left&space;(&space;\frac%7b2%7d%7b5%7d&space;\right&space;)%5e%7bx%7d%3E2.

Представим 2 в виде степени с основанием https://latex.codecogs.com/png.latex?\frac%7b2%7d%7b5%7d:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\left&space;(\frac%7b2%7d%7b5%7d&space;\right&space;)%5e%7bx%7d%3E\left&space;(\frac%7b2%7d%7b5%7d&space;\right&space;)%5e%7blog_%7b\frac%7b2%7d%7b5%7d%7d2%7d.

Получим: x < https://latex.codecogs.com/png.latex?log_%7b\frac%7b2%7d%7b5%7d%7d2.

Подведем итоги. И показательные, и логарифмические неравенства решаются практически одинаково. В первом случае — «отбрасываем» основания. Во втором — «отбрасываем» логарифмы. При этом, если основание больше единицы, знак неравенства сохраняется. Если основание меньше единицы — знак неравенства меняется на противоположный.

|  |  |
| --- | --- |
| Показательные неравенства | Логарифмические неравенства |
| https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/07t.png | https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/08t.png |
| https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/09t.png | https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/10t.png |