**Определение. Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается logab) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b.**

Иными словами,



Например:

  так как  ;

, так как  ;

  так как  ;

, так как  .

Логарифм с основанием 10 называется *десятичным* и обозначается lg. Например, lg 100 = 2, lg 1000 = 3, lg 0,01 = −2.

Логарифм с основанием e называется *натуральным* и обозначается ln.

Обратите внимание: логарифм определён только для положительных чисел. Причина заключается в том, что показательная функция может принимать лишь положительные значения. Например, число log2(−4) не существует: в какую бы степень мы ни возводили 2, мы никогда не получим −4.

Не забывайте также про ограничения на основание логарифма: 0 < a < 1 или a > 1.

**Основные формулы**

По определению, logab — это показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | alogab=b. | (1) |

Формула (1) называется *основным логарифмическим тождеством*.
Вот еще один вариант записи основного логарифмического тождества:

logaax=x.

Перечислим свойства логарифмов. Они являются простыми следствиями правил действия со степенями. Все логарифмы ниже считаются определёнными.

Логарифм произведения — это сумма логарифмов:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | loga(bc) = logab + logac. | (2) |

Логарифм частного — это разность логарифмов:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | log_{a}\frac{b}{c}=log_{a}b-log_{a}c. | (3) |

Показатель степени логарифмируемого числа «спрыгивает» перед логарифмом:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | log_{a}b^{m}=mlog_{a}b. | (4) |

Показатель степени основания логарифма тоже «спрыгивает», но в виде обратного числа:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | log_{a^{n}}b=\frac{1}{n}log_{a}b. | (5) |

Формулы (4) и (5) вместе дают:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/09q.png. | (6) |

В частности, если m = n, мы получаем формулу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/10q.png. | (7) |

Например, .

Наконец, важнейшая формула перехода к новому основанию:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/12q.png. | (8) |

В частности, если c = b, то logbb = 1, и тогда:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | https://ege-study.ru/wp-content/themes/ege/img/13q.png. | (9) |

Приведём несколько примеров из банка заданий.
**1.**  (применили формулу (2) суммы логарифмов).

**2.**  (применили основное логарифмическое тождество(1)).

**3.**  (применили формулу (4)).

**4.**  (применили формулу (9), перейдя к новому основанию 0,8).

**5.**  (применили формулу (3) разности логарифмов).

**Немного истории**

Теперь вы поняли, что такое логарифмы и как ими пользоваться. Но для чего они всё-таки нужны? Или это просто такая математическая игрушка с хитрой инструкцией по применению?

Понятие логарифма и логарифмические таблицы появились в 17 веке, и значение их было огромно.

Это в наши дни вычисления не представляют труда — у каждого есть калькулятор. А как считали в «докомпьютерные» времена?

Складывать и вычитать можно было на счётах, а вот умножать и делить приходилось «в столбик» — медленно и трудно.

В 15–17 веках, в эпоху великих географических открытий, стали бурно развиваться торговля, экономика и наука. Требования к математике росли: расчёты становились более сложными, а точность — например, для решения навигационных задач — нужна была всё более высокая.

Необходим был инструмент, позволяющий упростить и ускорить расчёты, и таким инструментом явились логарифмы.

Предположим, что b и c — большие числа, которые надо перемножить. Появление таблиц логарифмов (например, с основанием 10) существенно упростило эту задачу. Теперь вычислителю достаточно было найти по таблицам десятичные логарифмы чисел b и c, сложить их (на счётах) и получить логарифм произведения: lgb + lgc = lg(bc).

А затем по таблице логарифмов найти само произведение чисел b и c.

Недаром французский математик и астроном Лаплас сказал, что изобретение логарифмов удлинило жизнь вычислителей. Логарифмическая линейка (которой инженеры пользовались до 70-х годов двадцатого века) была не менее прогрессивным изобретением, чем современный калькулятор.