Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Скрещивающиеся прямые — прямые, которые не лежат в одной плоскости.

Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на паралельных прямых.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Мы уже знаем, что прямы в пространстве могут располагаться параллельно или пересекаться. Существует еще один вид- **скрещивающиеся прямые**. С ним мы мимолетно познакомились на предыдущем уроке. А сегодня нам предстоит разобраться с этой темой более подробно.

Определение. Скрещивающиеся прямые — прямые, которые не лежат в одной плоскости. (рис. 1)

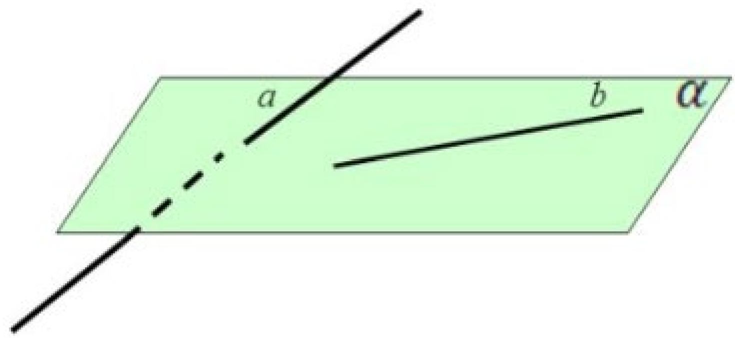


Рисунок 1 – скрещивающиеся прямые

На прошлом уроке в качестве наглядного примера нами был приведен куб.

Сегодня предлагаем вам обратить внимание на окружающую вас обстановку и найти в ней скрещивающиеся прямые.

Примеры скрещивающихся прямых вокруг нас:

Одна дорога проходит по эстакаде, а другая под эстакадой	

Кабели моста	
Горизонтальные линии крыши и вертикальные линии стен	

Разберем и докажем теорему, которая выражает признак скрещивающихся прямых.

Теорема. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).

Доказательство.
Рассмотрим прямую AB лежащую в плоскости и прямую CD, которая пересекает плоскость в точке D, не лежащей на прямой AB (рис. 2).

1. Допустим, что прямые AB и CD всё-таки лежат в одной плоскости.
   2. Значит эта плоскость идёт через прямую AB и точку D, то есть она совпадает с плоскостью α.
   3. Это противоречит условиям теоремы, что прямая CD не находится в плоскости α, а пересекает её.
   Теорема доказана.

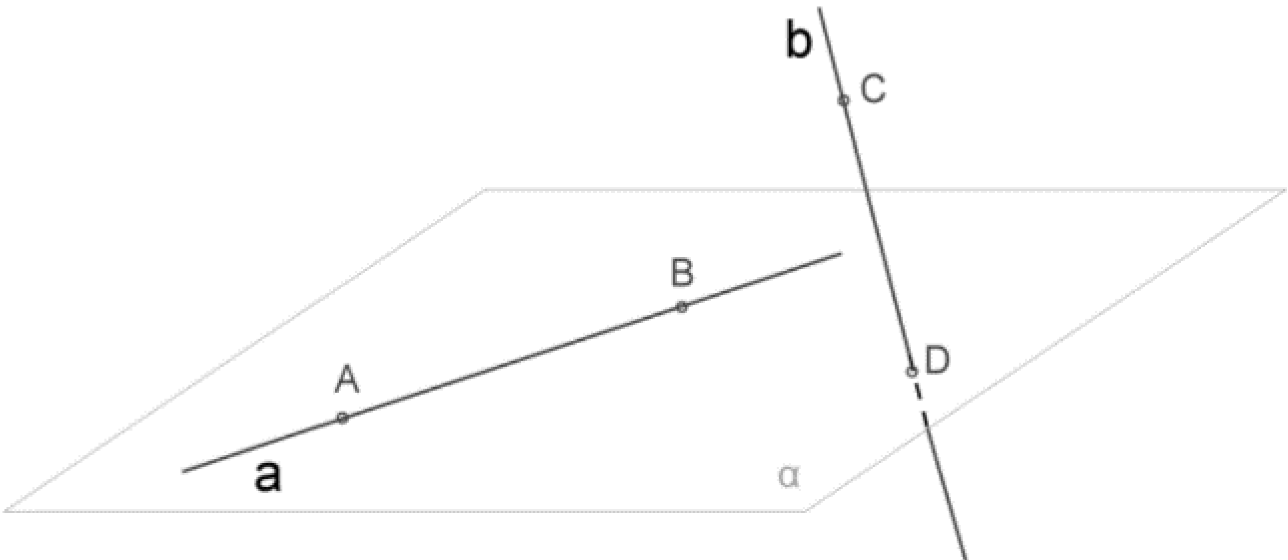
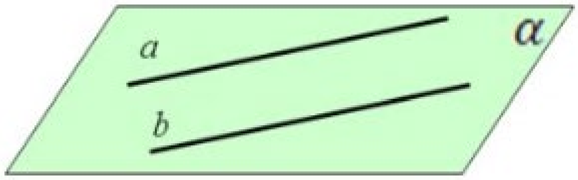
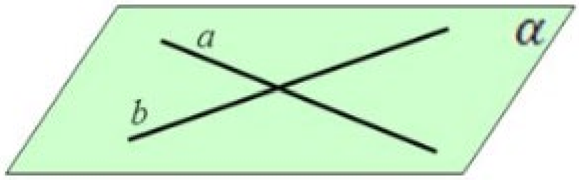
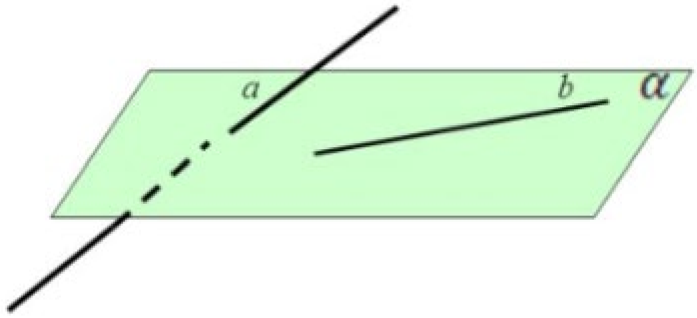


Рисунок 2 – скрещивающиеся прямые AB и CD

Итак, возможны три случая расположения прямых в пространстве:

1. параллельно	
1. пересекаются	
1. скрещиваются	

Разберем и докажем еще одну теорему о скрещивающихся прямых.

Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Доказательство
Рассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD.(рис. 3)

1. Через точку D можно провести прямую DE параллельную AB.
2. Через пересекающиеся прямые CD и DE можно провести плоскость α
3. Так как прямая *A*B не лежит в этой плоскости и параллельна прямой DE, то она параллельна плоскости.

4. Эта плоскость единственная, так как любая другая плоскость, проходящая через CD, будет пересекаться с DE и AB, которая ей параллельна.
Теорема доказана.

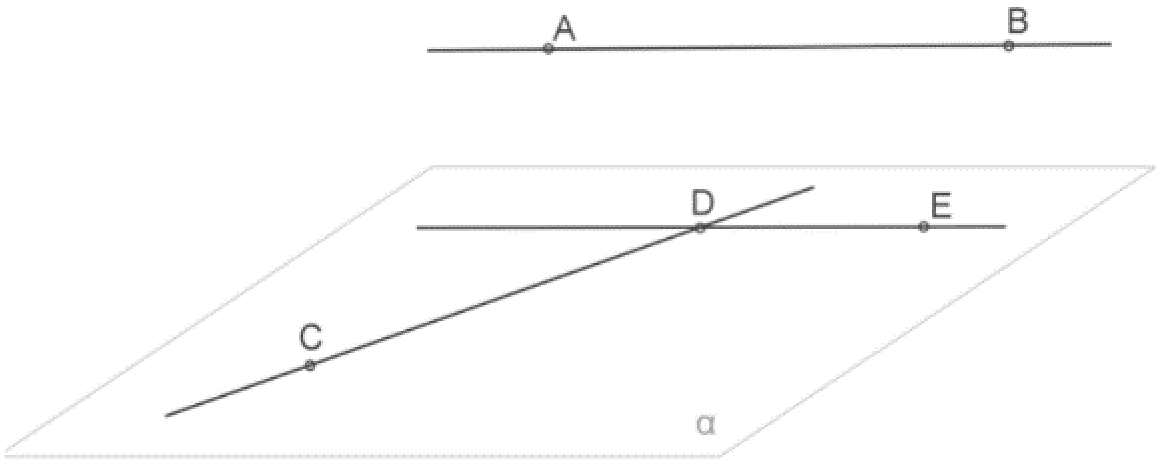


Рисунок 3 – прямые AB, CD, DE

Любая прямая, например OO_1, рассекает плоскость на две полуплоскости. Если лучи OA и O_1A_1 параллельны и лежат в одной полуплоскости, то они называются сонаправленными.

Лучи O_1A_1 и OA не являются сонаправленными. Они параллельны, но не лежат в одной полуплоскости. (рис. 4)

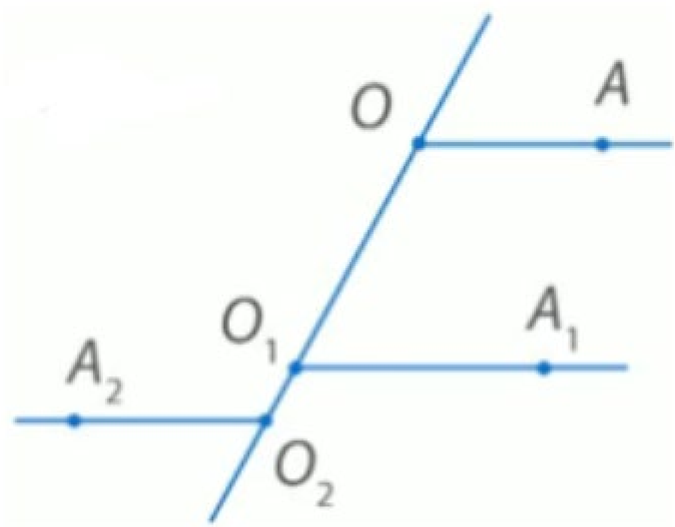


Рисунок 4 – сонаправленные лучи

Теорема.Если стороны двух углов соответственно сонаправленны, то такие углы равны. (рис. 5)

Доказательство:

при доказательстве ограничимся случаем, когда углы лежат в разных плоскостях.

1. Стороны углов сонаправлены, а, значит, параллельны. Проведем через них плоскости-   как показано на чертеже.

Отметим на сторонах угла O произвольные точки A и B.

На соответствующих сторонах угла O_1 отложим отрезки OA_1 и O_1B_1 равные соответственно OA и OB.

2. В плоскости   рассмотрим четырехугольник OAA_1O_1.

Так как противолежащие стороны OA и O_1A_1 этого четырехугольника равны и параллельны по условию, то этот четырехугольник– параллелограмм и, следовательно, равны и параллельны стороны AA_1 и OO_1.

3. В плоскости, аналогично можно доказать, что OBB_1O_1 параллелограмм, поэтому равны и параллельны стороны BB_1 и OO_1.

4. Если две отрезка AA_1 и BB_1 равны параллельны третьему отрезку OO_1, значит, они равны и параллельны, т. е. $AA_1 || BB_1$ и $AA_1 = BB_1$.

По определению четырехугольник ABB_1A_1 – параллелограмм и из этого получаем $AB=A_1B_1$.

5.Из выше построенного и доказанного $AB=A_1B_1$, $OA = O_1A_1$ и $OB = O_1B_1$ следует, что треугольники AOB и $A_1 O_1 B_1$. равны по трем сторонам, и поэтому $O= O_1$.

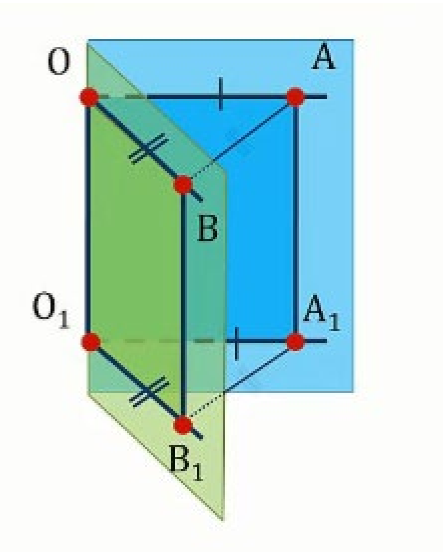


Рисунок 5 – равные углы с сонаправленными сторонами

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и другие три угла. Пусть a - тот из углов, который не превосходит любого из трех остальных углов. Тогда говорят, что угол между пересекающимися прямыми равен a. Очевидно, $0° < a \leq 90°$.

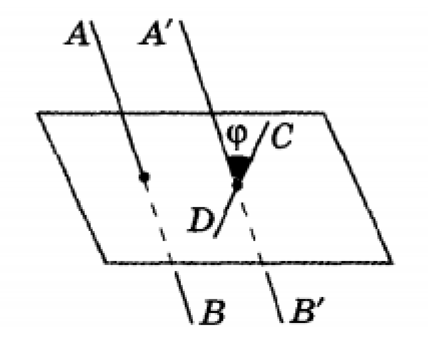
Введем теперь понятие угла между **скрещивающимися прямыми**(рис. 6, 7).Пусть AB и CD- две скрещивающиеся прямые (рис. а.) Через произвольную точку M_1 проведем прямые A_1B_1 и C_1D_1, соответственно параллельные прямым AB и CB (рис. б). Если угол между прямыми A_1B_1 и C_1D_1 равен φ, то будем говорить, что **угол между**

скрещивающимися прямыми AB и CD равен φ. Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M_1.

Действительно, возьмем любую другую точку M_2 и проведем через нее прямые A_1B_1 и C_1D_1, соответственно параллельные прямым AB и CD (рис. б).

Так как $A_1B_1 \| A_1B_1$, $C_1D_1 \| C_1D_1$, то стороны углов с вершинами M_1 и M_1 попарно сонаправлены (рис. б, такими углами являются $\llcorner A_1M_1C_1$ и $\llcorner A_1M_1C_1$, $\llcorner A_1M_1D_1$ и $\llcorner A_1M_1D_1$ и т.д.) Поэтому эти углы соответственно равны. Отсюда следует, что угол между прямыми A_1B_1 и C_1D_1 также равен φ. В качестве точки М, можно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых.

На рисунке в на прямой CD отмечена точка М и через нее проведена прямая A'B', параллельная AB. Угол между прямыми A'B' и CD также равен φ.



в)

Рисунок 6 – угол между скрещивающимися прямыми

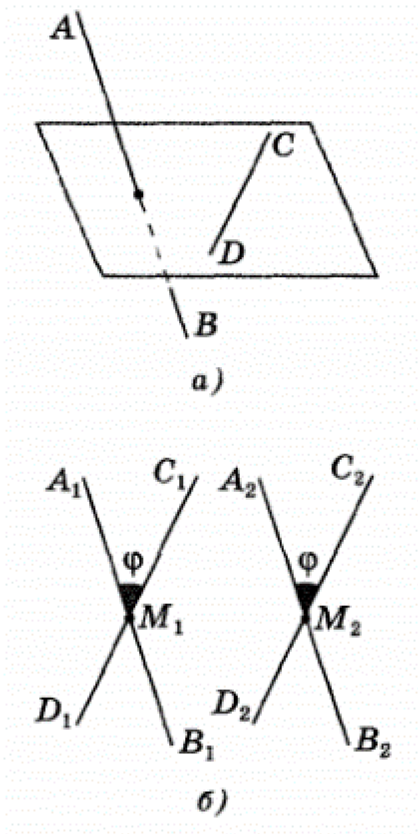


Рисунок 7 – угол между скрещивающимися прямыми

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1. Прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b, параллельна прямой a. Докажите, что b и c- скрещивающиеся прямые .

Доказательство:

1. a||b- через a и b проведем плоскость α (эта плоскость существует по определению параллельных прямых);
2. пусть c пересекает a в точке M. a||b⇒ M ∉b.
3. по теореме о признаке скрещивающихся прямых, c и b скрещиваются.

Пример 2. Выделите цветом верный ответ:

Дано: OB||CD

OA и CD- скрещивающиеся

∟AOB= 40°

Найти: угол между OA и CD

1. **50°**
2. **40°**
3. **140°**

Решение:

1. $D \in A_1D$, $A_1D || AO$
2. *угол между OA и CD=*$\llcorner A_1DC$
3. $\llcorner A_1DC = \llcorner AOB = 40°$.

Ответ: $\llcorner A_1DC = 40°$.

Правильный ответ:

1. **50°**
2. **40°**
3. **140°**

Параллельность прямых и плоскостей

Прямые

Параллельные прямые **- прямые в пространстве, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются.**

Теорема о параллельных прямых. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Прямая и плоскость

Три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

1. Прямая лежит в плоскости.
2. Прямая и плоскость имеют только одну общую точку (т.е. пересекаются).
3. Прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

Прямая и плоскость **называются параллельными, если они не имеют общих точек.**

Признак параллельности прямой и плоскости:

Если **прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельно данной плоскости**.

Свойство прямой, параллельной плоскости:

Если **в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей**.

Плоскости

Параллельные плоскости **– плоскости, не имеющие общих точек.**

Признаки параллельности плоскостей:

- Если **две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны**.
- Если **две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны**.

  Свойства параллельных плоскостей:
- Если **две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения плоскостей параллельны**.
- **Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны**.