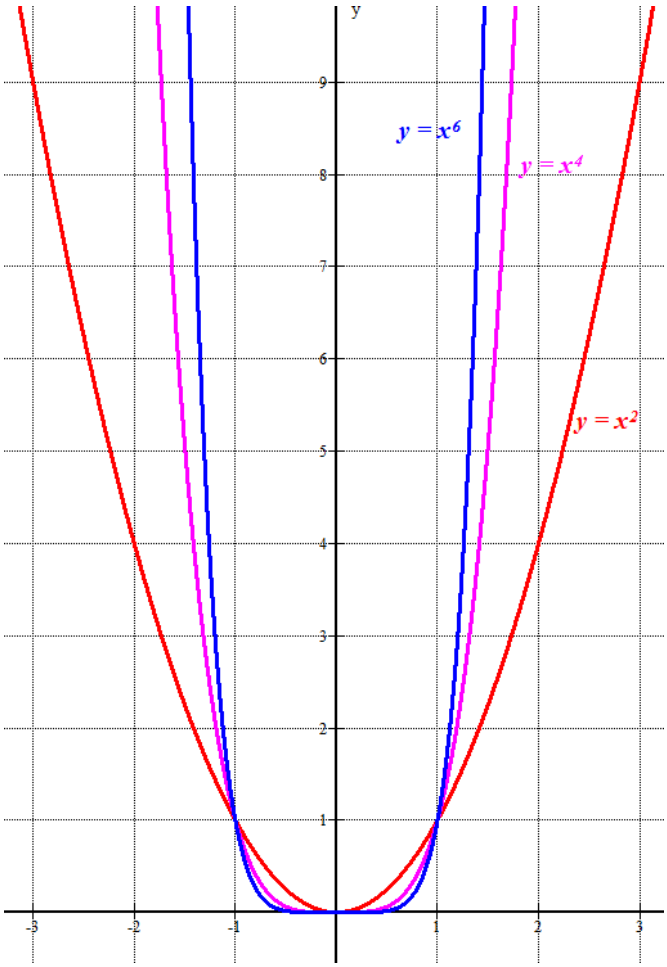
СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

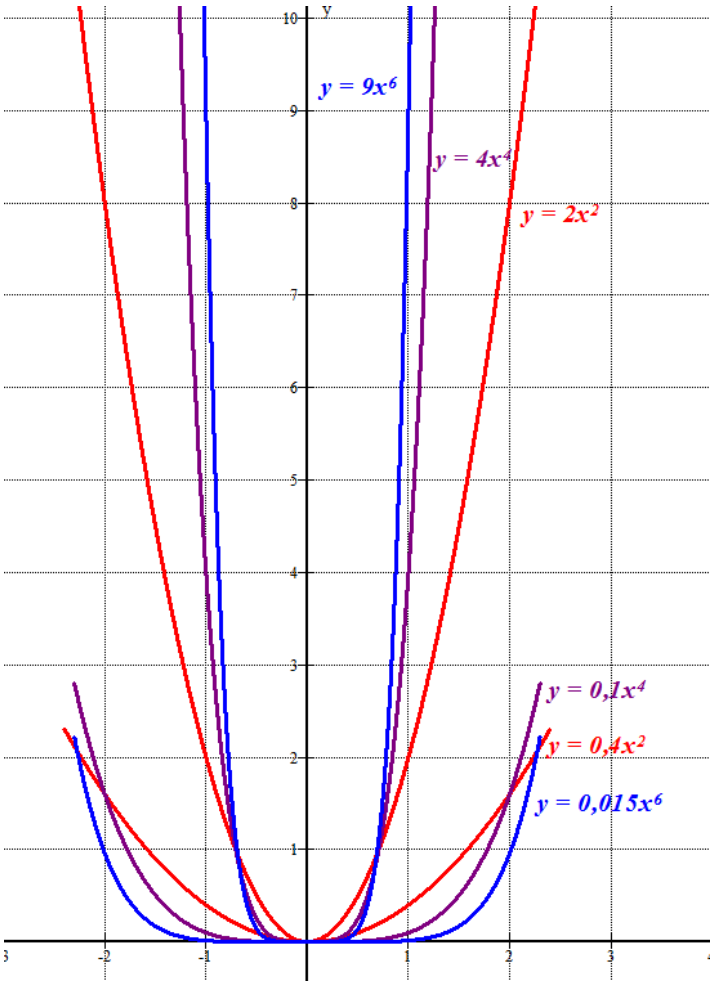
Степенной называется функция, заданная формулой где , p – некоторое действительное число.

I. Показатель - чётное натуральное число. Тогда степенная функция где n – натуральное число, обладает следующими свойствами:

1) Область определения функции - множество всех действительных чисел: $D(y)=(-; +)$.
2) Область значений функции – множество неотрицательных чисел, если :
множество неположительных чисел, если :
3) ***)***. Значит, функция является чётной, её график симметричен относительно оси Oy.
4) Если , то функция убывает при x (- ; 0] и возрастает при x [0; +).
Если , то функция возрастает при x (- ; 0] и убывает при x [0; +).

Графиком степенной функции с чётным натуральным показателем является парабола n-ой степени, симметричная относительно оси ординат, с вершиной в начале координат (в точке), ветви которой направлены вверх, если , и вниз, если . График этой функции получается из графика функции растяжением вдоль оси Oy в a раз, если $a > 1$; и сжатием к оси Ox в a раз, если $0 < a < 1$.
На левом рисунке изображены примеры графиков степенных функций с чётным натуральным показателем, а на правом рисунке – графики тех же функций, но с растяжением и сжатием.


y
$y = x^6$
$y = x^4$
$y = x^2$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-3
-2
-1
1
2
3

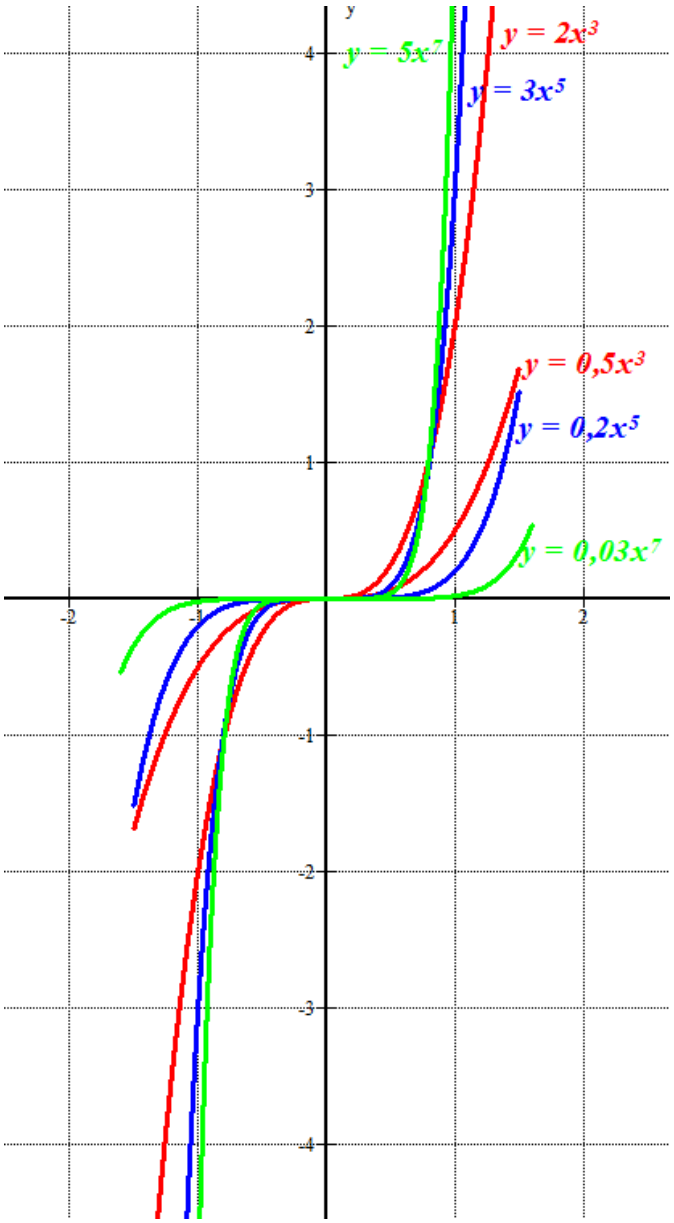


II. Показатель - нечётное натуральное число. Тогда степенная функция где *n* – натуральное число, обладает следующими свойствами:

1) Область определения функции - множество всех действительных чисел: *D(y)*=(−; +).
2) Область значений функции – множество всех действительных чисел: *E(y)* = (−; +).
3) Значит, функция является нечётной, её график симметричен относительно начала координат.
4) Если , функция возрастает при *x* (- ; +).
Если , функция убывает при *x* (- ; +).

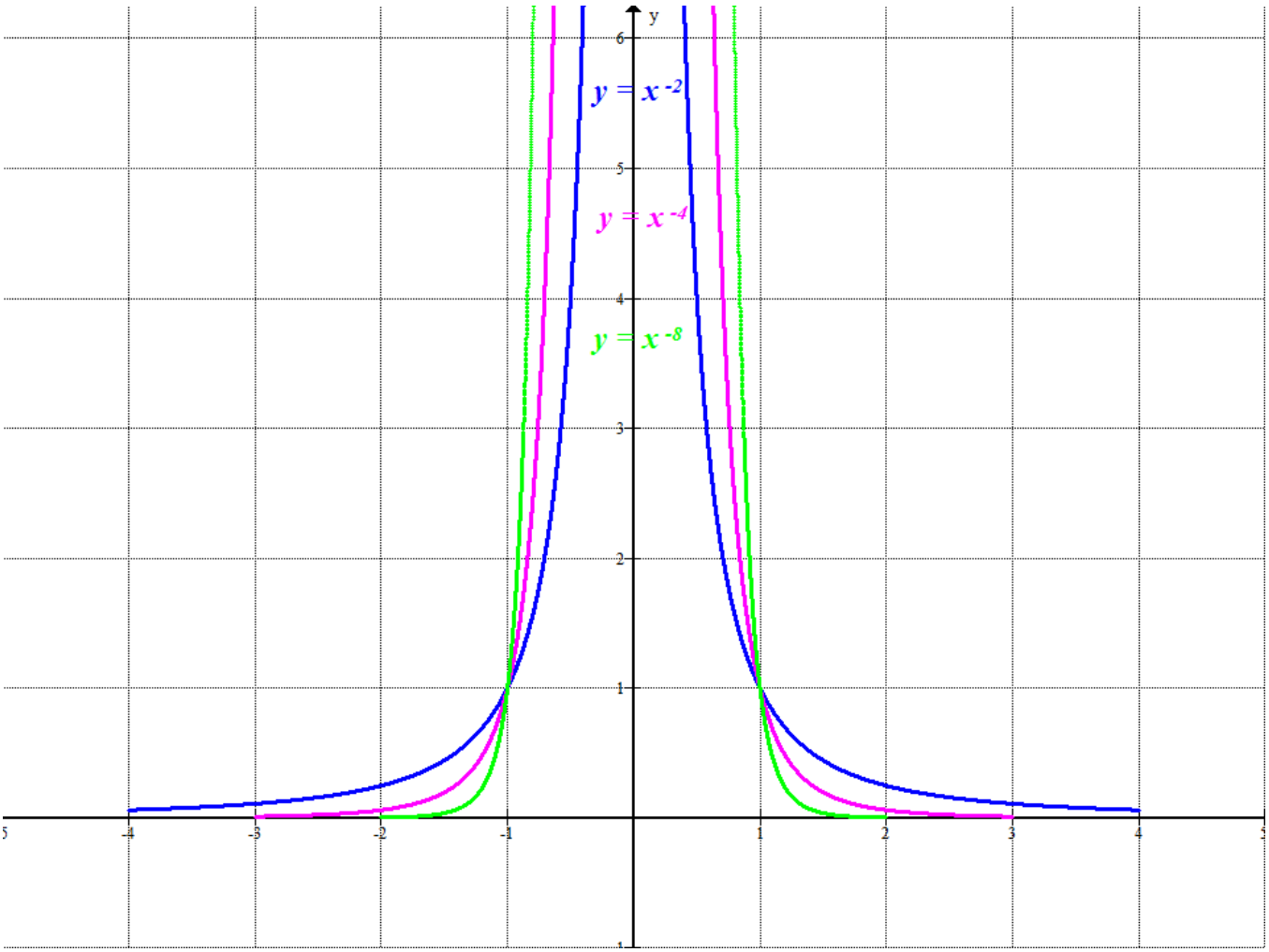
Графиком степенной функции с нечётным натуральным показателем является парабола *n*-ой степени с вершиной в начале координат (точке (0;0)), симметричная относительно начала координат, ветви которой расположены в I и III четвертях, если ; и во II и IV четвертях, если . График этой функции получается из графика функции растяжением вдоль оси *Oy* в *a* раз, если *a* > 1; и сжатием к оси *Ox* в *a* раз, если 0 < *a* < 1.
На левом рисунке изображены примеры графиков степенных функций с нечётным натуральным показателем, а на правом – графики тех же функций, но с растяжением и

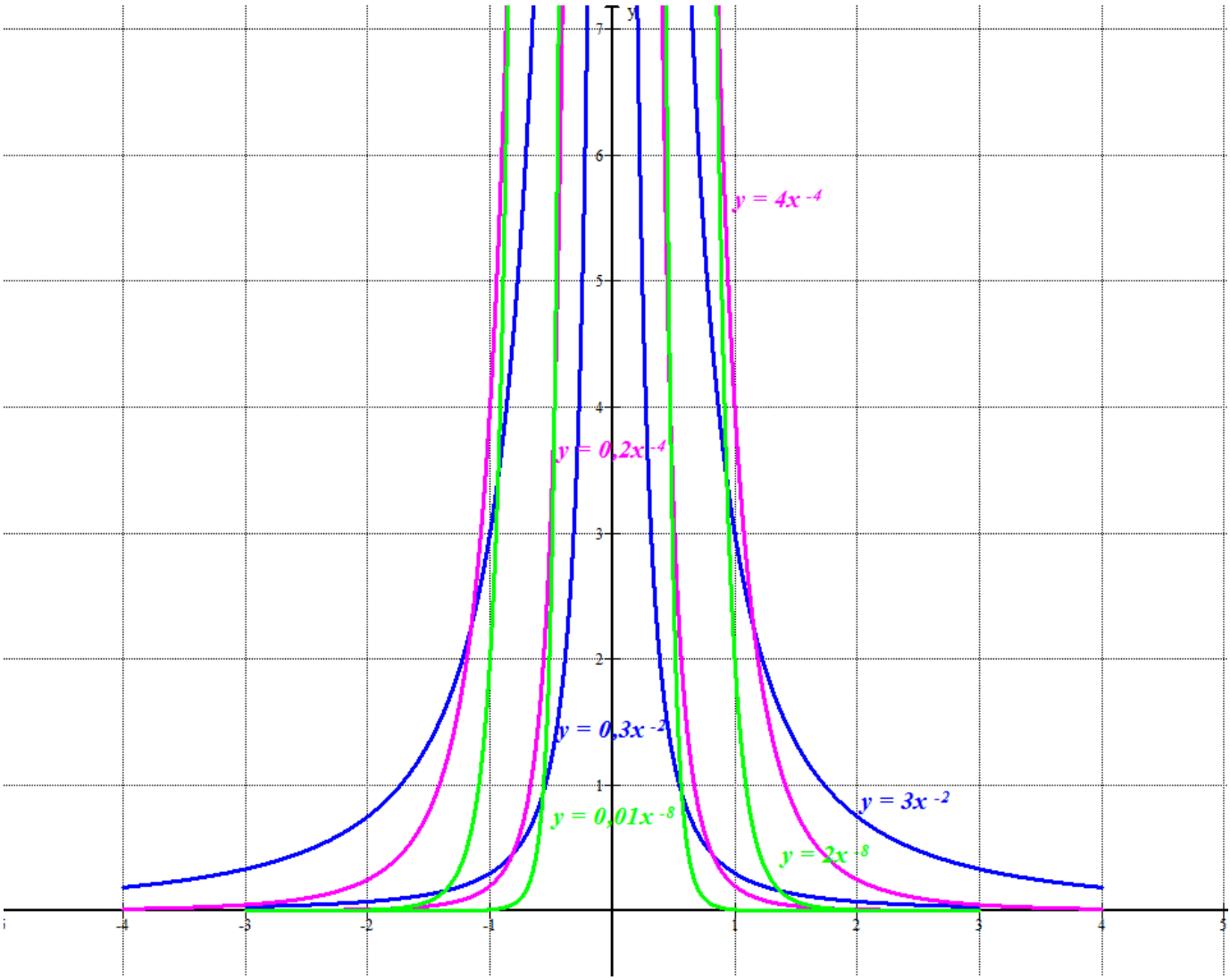
сжатием.



III. Показатель - чётное целое отрицательное число. Тогда степенная функция где *n* – натуральное число, обладает следующими свойствами:
1) Область определения функции: .
2) Область значений функции - множество всех положительных чисел, если : *E(y)* =(0; +); множество всех отрицательных чисел, если : *E(y)* =(-; 0).
3) Значит, функция является чётной, её график симметричен относительно оси *Oy*.
4) Если , функция возрастает при *x* (- ; 0), убывает при *x* (0; +).
Если функция убывает при *x* (- ; 0), возрастает при *x* (0; +).

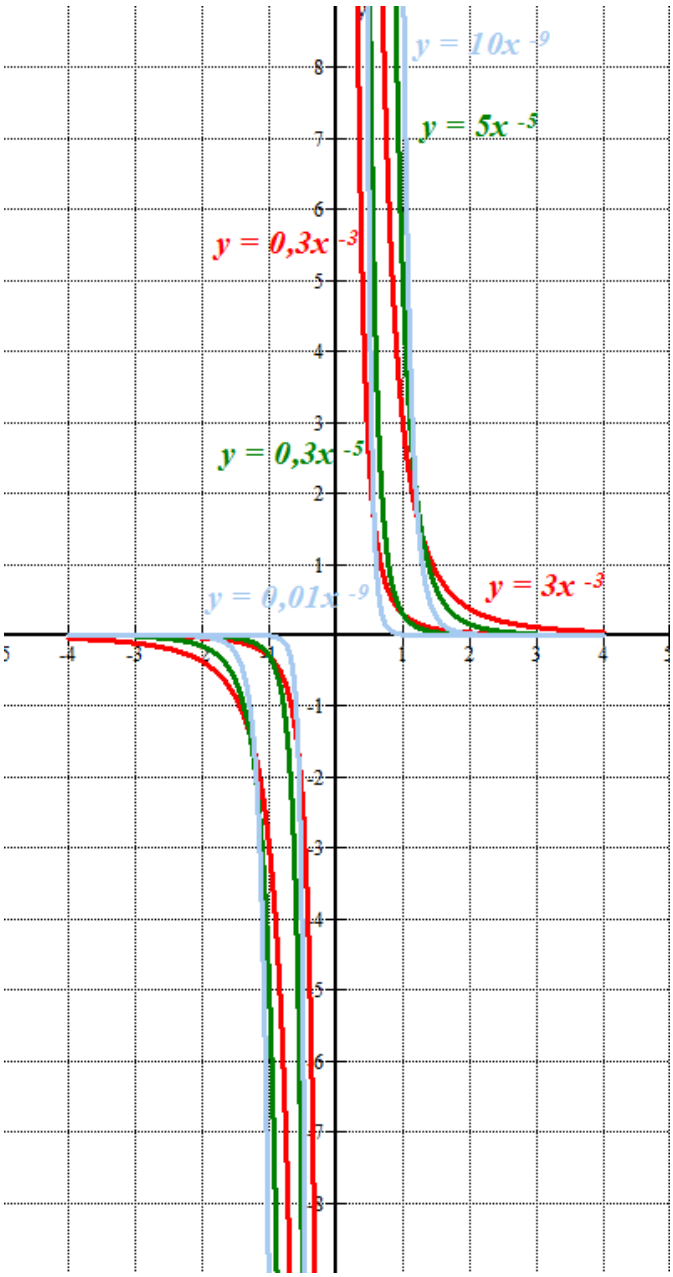
Графиком степенной функции является гипербола *n*-ой степени, симметричная относительно оси *Oy*, не пересекающая оси координат и её ветви расположены в I и II четвертях, если , и в III и IV четвертях, если . График этой функции получается из графика функции растяжением вдоль оси *Oy* в *a* раз, если $a > 1$; и сжатием к оси *Ox* в *a* раз, если $0 < a < 1$.
На первом рисунке изображены примеры графиков степенных функций с чётным целым отрицательным показателем, а на втором рисунке – графики тех же функций, но с растяжением и сжатием.


y
$y = x^{-2}$
$y = x^{-4}$
$y = x^{-8}$
6
5
4
3
2
1
-1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

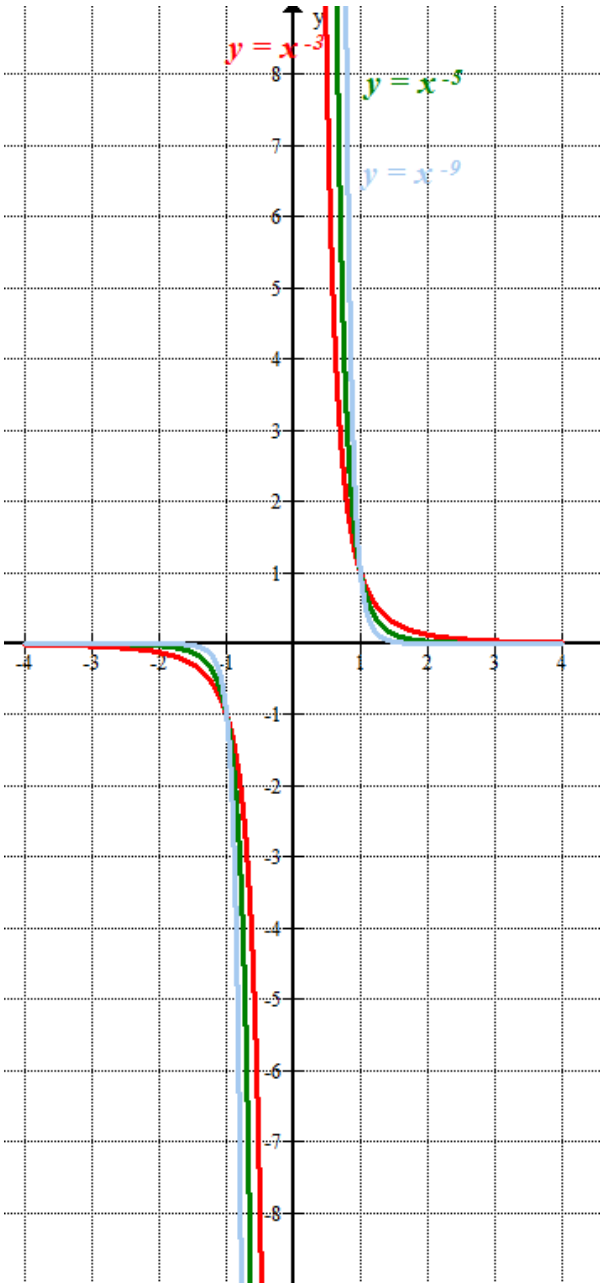

y
7
6
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
y = 4x -4
y = 0,2x -4
y = 0,3x -2
y = 0,01x -8
y = 3x -2
y = 2x -8

IV. Показатель - нечётное целое отрицательное число. Тогда степенная функция где n – натуральное число, обладает следующими свойствами:
1) Область определения функции:
2) Область значений функции:
3) Значит, функция является нечётной, её график симметричен относительно начала координат.
4) Если , функция убывает при x .
Если , функция возрастает при x .

Графиком степенной функции является гипербола n-ой степени, симметричная относительно начала координат, не пересекающая оси координат и его ветви расположены в I и III четвертях, если , и во II и IV четвертях, если . График этой функции получается из графика функции растяжением вдоль оси Oy в a раз, если $a > 1$; и сжатием к оси Ox в a раз, если $0 < a < 1$.
На левом рисунке изображены примеры графиков степенных функций с нечётным целым отрицательным показателем, а на правом рисунке – графики тех же функций, но с



растяжением и сжатием.



V. Показатель – положительная правильная дробь . Тогда степенная функция где m – целое положительное число, $n > 1$ – натуральное число, обладает следующими свойствами:

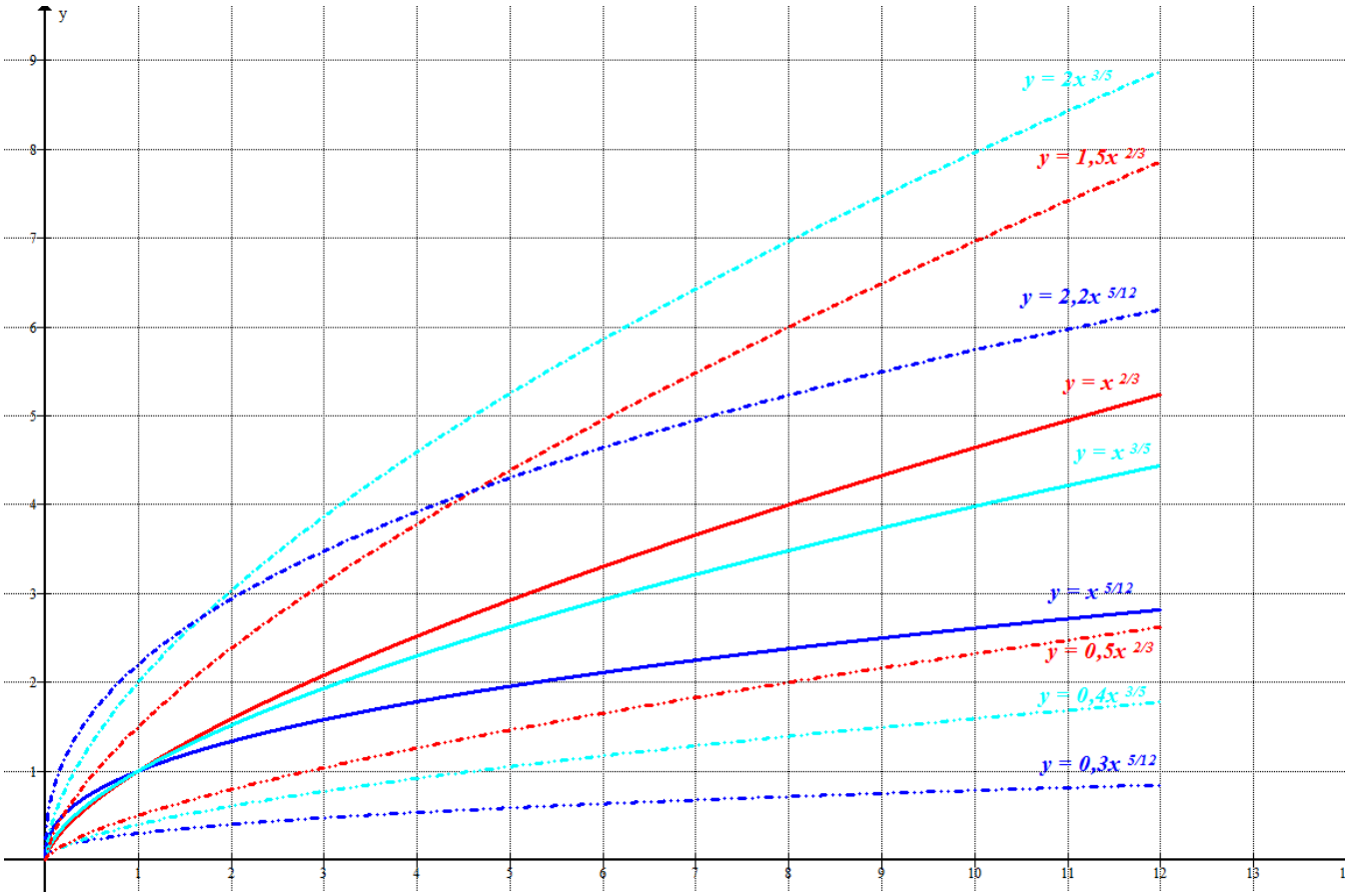
1) Областью определения функции, исходя из определения степени с рациональным показателем, является множество неотрицательных чисел:

2) Область значений функции - множество неотрицательных чисел, если :
множество неположительных чисел, если : .

3) Функция не является ни чётной, ни нечётной, так как её область определения не содержит противоположных значений.

4) Если , функция возрастает при x ;
Если , функция убывает при x .

График степенной функции расположен в I четверти, если , и в IV четверти, если .
График этой функции получается из графика функции растяжением вдоль оси Oy в a раз, если $a > 1$; и сжатием к оси Ox в a раз, если $0 < a < 1$.
На рисунке изображены примеры графиков степенных функций с показателем, представленным в виде положительной правильной дроби и графики тех же функций, но с



растяжением и сжатием.

VI. Показатель – положительная неправильная дробь . Тогда степенная функция где m – целое положительное число, $n > 1$ – натуральное число, обладает следующими свойствами:

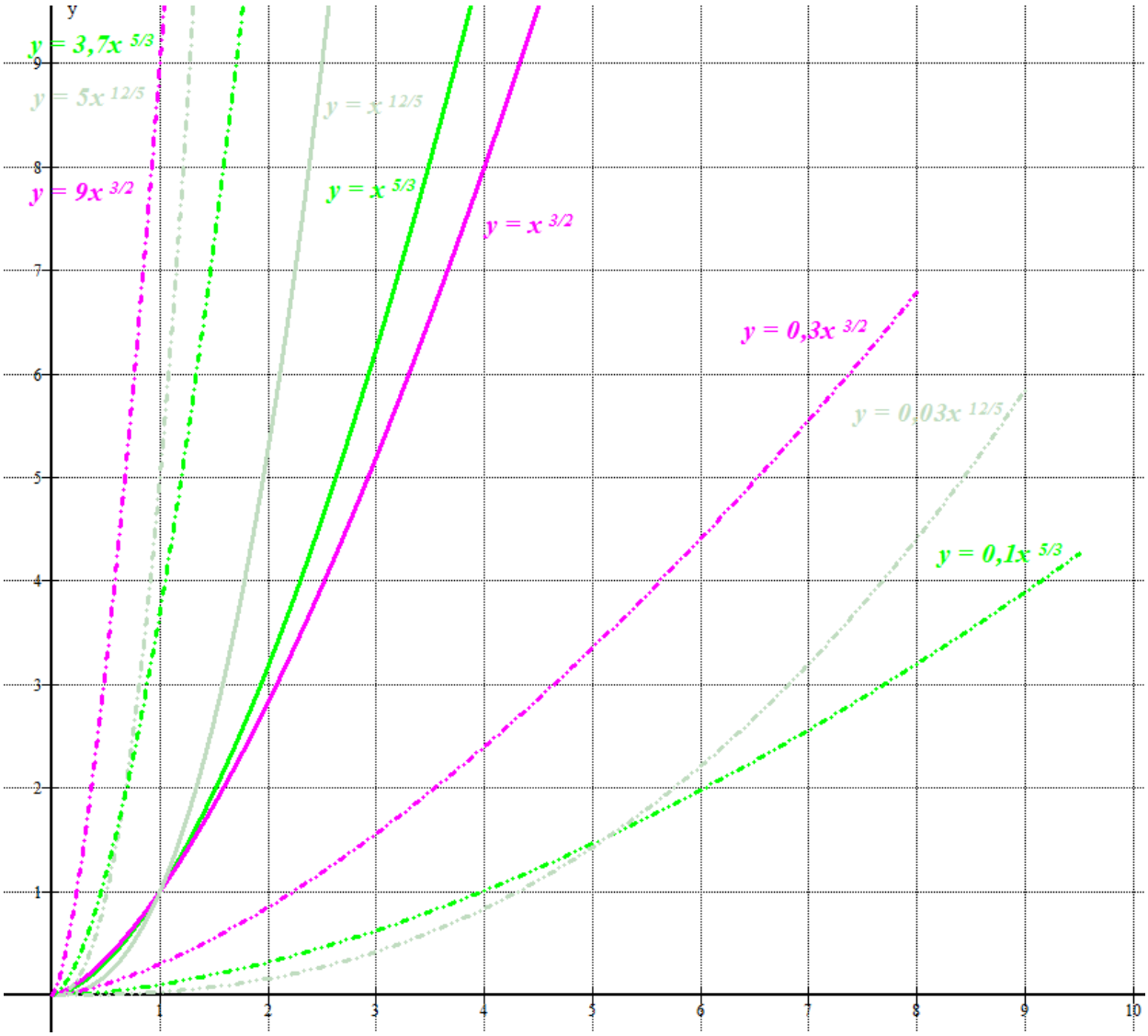
1) Областью определения функции, исходя из определения степени с рациональным показателем, является множество неотрицательных чисел:

2) Область значений функции - множество неотрицательных чисел, если :
множество неположительных чисел, если : .

3) Функция не является ни чётной, ни нечётной, так как её область определения не содержит противоположных значений.

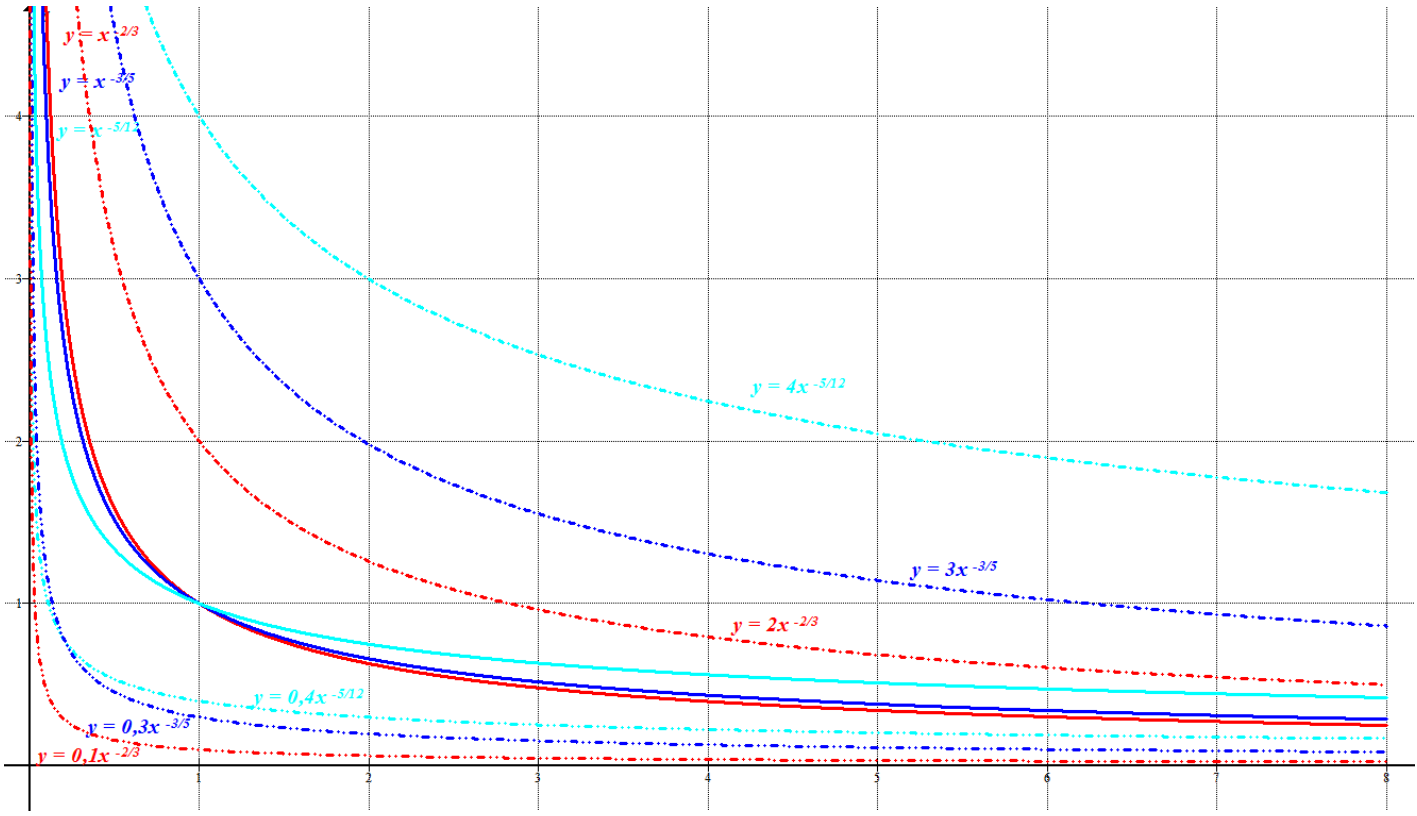
4) Если , функция возрастает при x ;
Если , функция убывает при x .

График степенной функции расположен в I четверти, если , и в IV четверти, если .
График этой функции получается из графика функции растяжением вдоль оси Oy в a раз, если $a > 1$; и сжатием к оси Ox в a раз, если $0 < a < 1$.
На рисунке изображены примеры графиков степенных функций с показателем, представленным в виде положительной неправильной дроби и графики тех же функций, но с растяжением и сжатием.



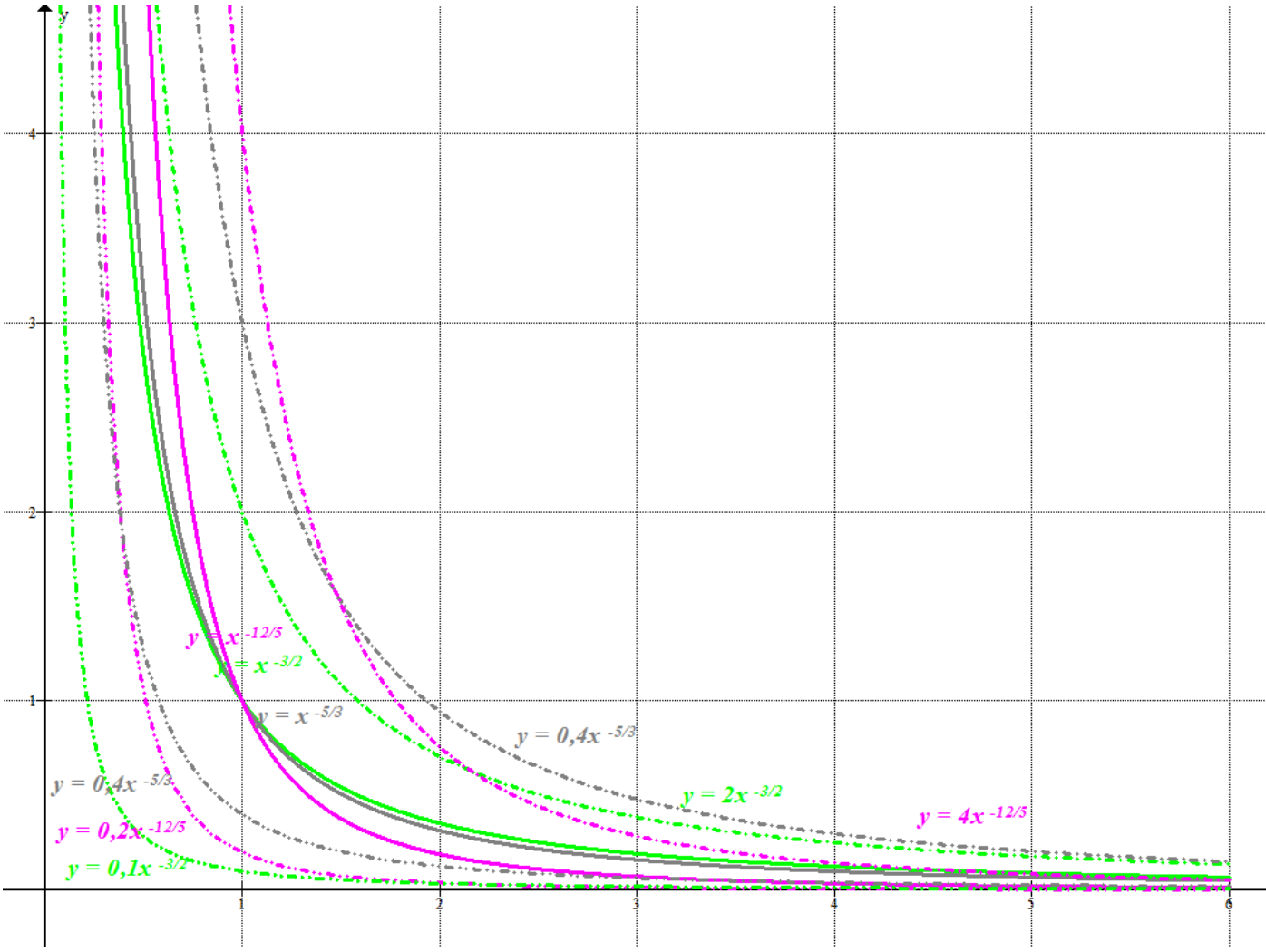
VII. Показатель – отрицательная правильная дробь . Тогда степенная функция где m – целое отрицательное число, $n > 1$ – натуральное число, обладает следующими свойствами:
1) Областью определения функции, исходя из определения степени с рациональным показателем, является множество неотрицательных чисел:
2) Область значений функции - множество неотрицательных чисел, если :
множество неположительных чисел, если : .
3) Функция не является ни чётной, ни нечётной, так как её область определения не содержит противоположных значений.
4) Если , функция убывает при x ;
Если функция возрастает при x .

График степенной функции расположен в I четверти, если , и в IV четверти, если .
График этой функции получается из графика функции растяжением вдоль оси Oy в a раз, если $a > 1$; и сжатием к оси Ox в a раз, если $0 < a < 1$.
На рисунке изображены примеры графиков степенных функций с показателем, представленным в виде отрицательной правильной дроби и графики тех же функций, но с растяжением и сжатием.



VIII. Показатель – отрицательная неправильная дробь . Тогда степенная функция где m – целое отрицательное число, $n > 1$ – натуральное число, обладает следующими свойствами:
1) Областью определения функции, исходя из определения степени с рациональным показателем, является множество неотрицательных чисел:
2) Область значений функции - множество неотрицательных чисел, если :
множество неположительных чисел, если : .
3) Функция не является ни чётной, ни нечётной, так как её область определения не содержит противоположных значений.
4) Если функция убывает при x ;
Если функция возрастает при x .

График степенной функции расположен в I четверти, если , и в IV четверти, если .
График этой функции получается из графика функции растяжением вдоль оси Oy в a раз, если $a > 1$; и сжатием к оси Ox в a раз, если $0 < a < 1$.
На рисунке изображены примеры графиков степенных функций с показателем, представленным в виде отрицательной неправильной дроби и графики тех же функций, но с растяжением и сжатием.


y
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
y = x -12/5
y = x -3/2
y = x -5/3
y = 0,4x -5/3
y = 2x -3/2
y = 4x -12/5
y = 0,4x -5/3
y = 0,2x -12/5
y = 0,1x -3/2